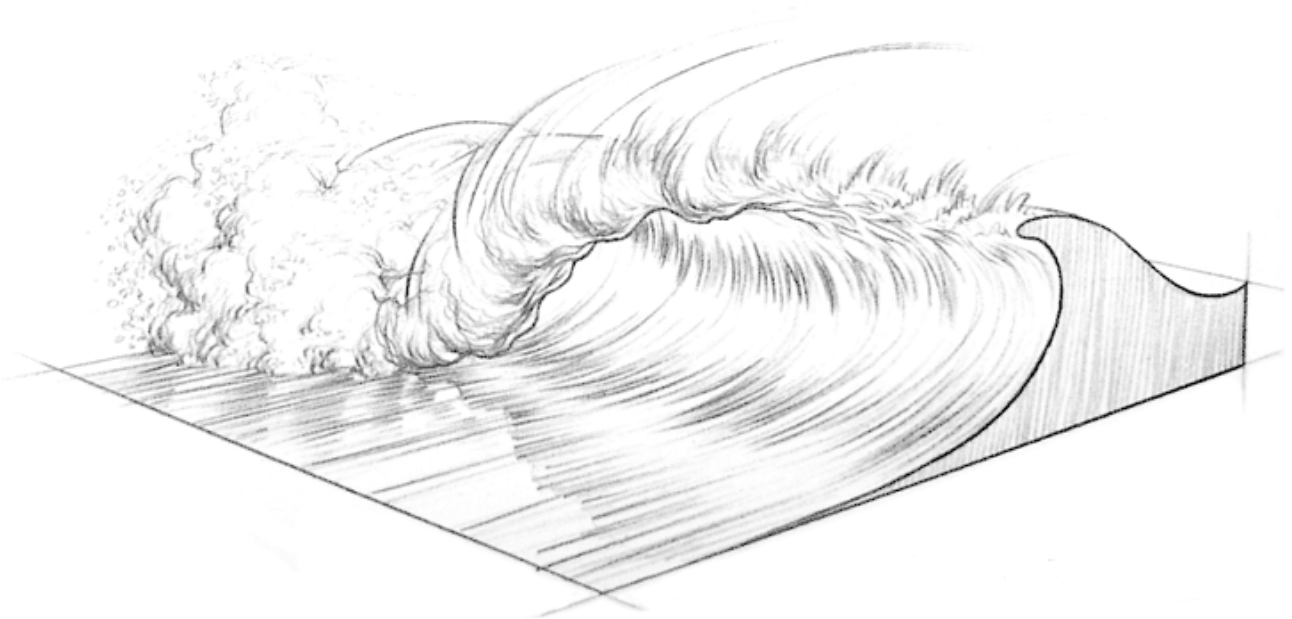


# Déferlement des vagues



# I. Introduction

Le déferlement des vagues peut être considéré comme un des phénomènes les plus attrayants en hydrodynamique. En fait, la houle formée par le vent finit par buter sur le fond marin qui la freine. La crête de la vague est ainsi projetée vers l'avant, donnant naissance à une vague déferlante, quelquefois creuse au point de former un tube.

Pour modéliser le comportement de la houle au bord de la côte, on considérera un fluide :

- incompressible,  $\text{div } \vec{v} = 0$  où  $\vec{v}$  est la vitesse du fluide
- non visqueux,  $\nu = 0$
- avec un écoulement irrotationnel, dérivant donc d'un potentiel  $\Phi$ , avec  $\vec{v} = \text{grad } \Phi$ .

La situation la plus simple est le cas d'un rivage infini droit, qui permet de ramener le problème à deux dimensions

$\Phi = \Phi(x, z)$  où  $x$  est la distance au rivage et  $z$  la hauteur.

Une solution simple peut être obtenue, par séparation des variables  $x$  et  $z$  sous la forme :

$$\Phi = \phi(x) \exp(ikx - \omega t)$$

Nous examinerons les solutions en fonction du profil marin, ainsi que de la longueur d'onde de la vague et de sa vitesse de propagation.

Dans une première partie, nous allons étudier les méthodes numériques que nous allons utiliser pour trouver les solutions. Ensuite, dans une deuxième partie nous allons faire une étude analytique détaillée du problème et enfin nous allons appliquer ce qui a été fait dans les deux premières parties pour modéliser le comportement d'une vague.

Tous les programmes utilisés se sont dans l'annexe des programmes à la fin du rapport.

Un CD avec une vidéo se trouve à la fin du rapport.

## II. Méthodes numériques

Pour résoudre une équation différentielle du deuxième ordre, de la forme  $\frac{d^2y}{dx^2} + \alpha \frac{dy}{dx} = r(x)$  comme notre équation (1), nous nous ramenons à un système d'équation du premier ordre :

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= z(x) \\ \frac{dz}{dx} &= r(x) - \alpha z(x)\end{aligned}$$

Pour résoudre numériquement ce système, nous allons comparer trois méthodes qui se basent sur approximation du pas d'intégration.

### 1. La méthode d'Euler

C'est la méthode la plus simple. La série de Taylor nous donne en un point  $a$  pour une fonction  $f$ :

$$\sum \frac{f^{(n)}}{n!} (x-a)^n$$

On en déduit que  $f(x+h) = f(x) + (x+h-x) \frac{f'(x)}{1!} + (x+h-x)^2 \frac{f''(x)}{2!} + \dots + (x+h-x)^n \frac{f^{(n)}}{n!}$

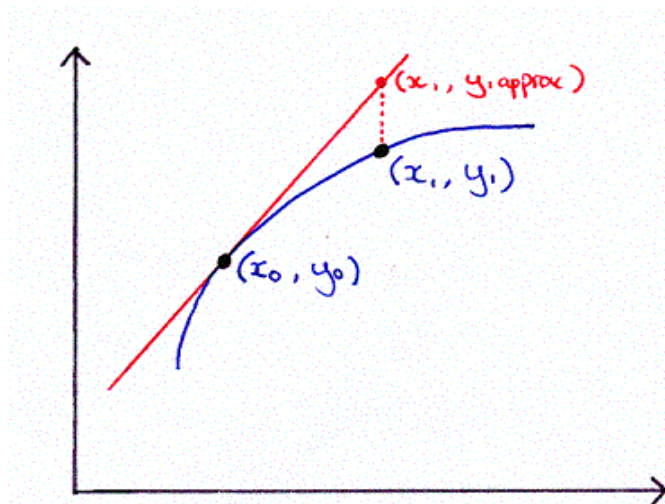
Soit  $f(x+h) = f(x) + hf'(x) + o(h^2)$ ,  $o(h^2)$  étant le terme d'erreur à l'ordre 2.

Lorsque nous allons faire notre programme pour résoudre une ou plusieurs équations avec la méthode d'Euler, nous allons négliger le terme d'erreur d'ordre 2.

On calcule alors successivement les valeurs de notre fonction de la manière suivante :

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$$

Si l'on connaît les valeurs initiales  $(x_0; y_0)$  on peut alors calculer toutes les valeurs successives  $y_i$  avec un pas  $h = x_{i+1} - x_i$



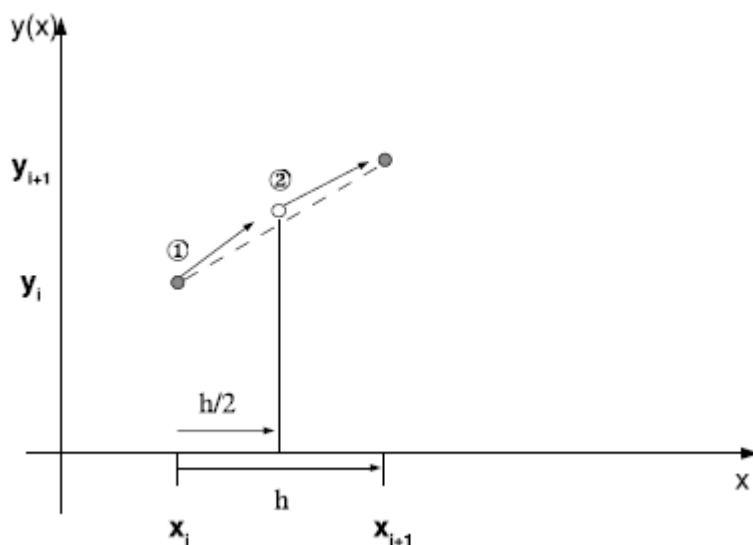
## 2. La méthode de Runge Kutta à l'ordre 2

La méthode de Runge Kutta à l'ordre 2 (RK2) est basée sur le même principe que la méthode d'Euler, à la différence près que l'on utilise la dérivée au point de départ  $x_i$  pour trouver un point intermédiaire. On utilise ensuite la dérivée en ce point pour trouver la valeur suivante de la fonction :

$$k_1 = h.f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = h.f(x_i + h/2, y_i + h/2)$$

$$y_{i+1} = y_i + k_2 + o(h^3)$$



C'est une méthode d'ordre 2, l'erreur est donc d'ordre 3. Nous la comparerons ensuite à la méthode d'Euler.

## 3. La méthode de Runge Kutta à l'ordre 4

La méthode de Runge Kutta à l'ordre 4 (RK4) est semblable à la méthode RK2 mais elle est plus précise puisque l'on utilise quatre points (ou estimations), au lieu de deux points pour la méthode RK2 et un seul pour la méthode d'Euler. L'erreur de cette méthode est donc d'ordre 5.

$$k_1 = h.f(x_i, y_i) \quad (\text{Euler})$$

$$k_2 = h.f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}) \quad (\text{RK2})$$

$$k_3 = h.f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2})$$

$$k_4 = h.f(x_i + h, y_i + k_3)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{k_1}{6} + \frac{k_2}{3} + \frac{k_3}{3} + \frac{k_4}{6} + o(h^5)$$

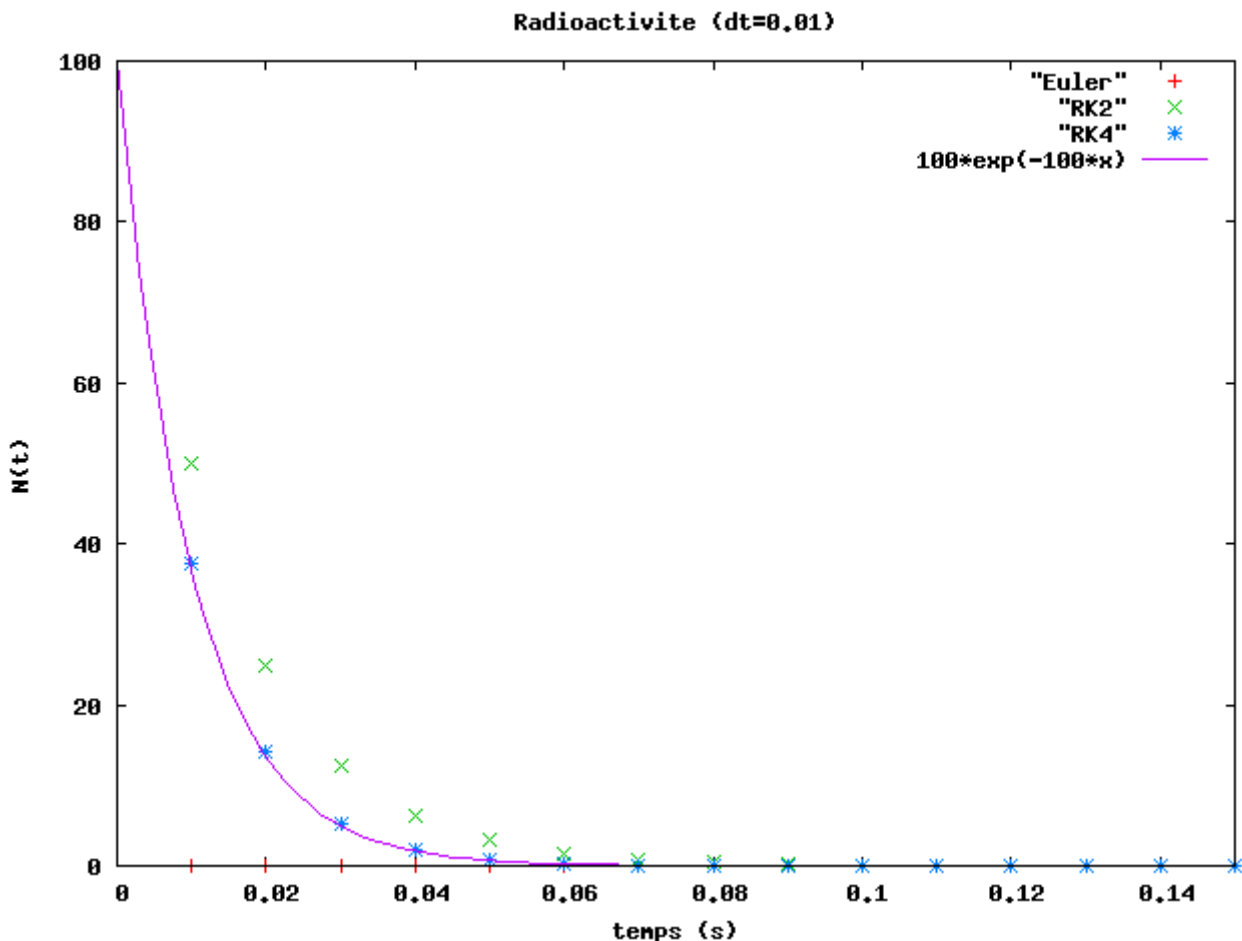
#### 4. Précision des méthodes

Il est possible de calculer mathématiquement les erreurs et la stabilité des différentes méthodes, mais nous allons créer un programme pour comparer sur deux exemples différents.

Tout d'abord, nous allons résoudre une équation différentielle du premier ordre en prenant pour exemple la décroissance radioactive. Elle admet pour équation différentielle  $\frac{dN}{dt} + k.N = 0$

soit  $\frac{dN}{dt} = -k.N$  dont la solution analytique est  $N(t) = N_0 \exp(-k.t)$ .

Nous allons résoudre numériquement ces équation à l'aide des programmes 1,2 et 3 en utilisant un pas  $dt=0,01$  (ce qui est déjà un petit pas) et avec  $k=100 s^{-1}$  et  $N_0=100$  :



Des trois méthodes, la méthode de Runge-Kutta à l'ordre 4 est clairement la plus précise alors que la méthode d'Euler diverge complètement.

Maintenant, nous allons nous intéresser à un équation différentielle d'ordre 2, du même type que celle que nous allons utiliser dans le déferlement des vagues quoique simplifié. Pour cela nous allons prendre l'exemple de l'oscillateur harmonique (type ressort). L'équation différentielle est

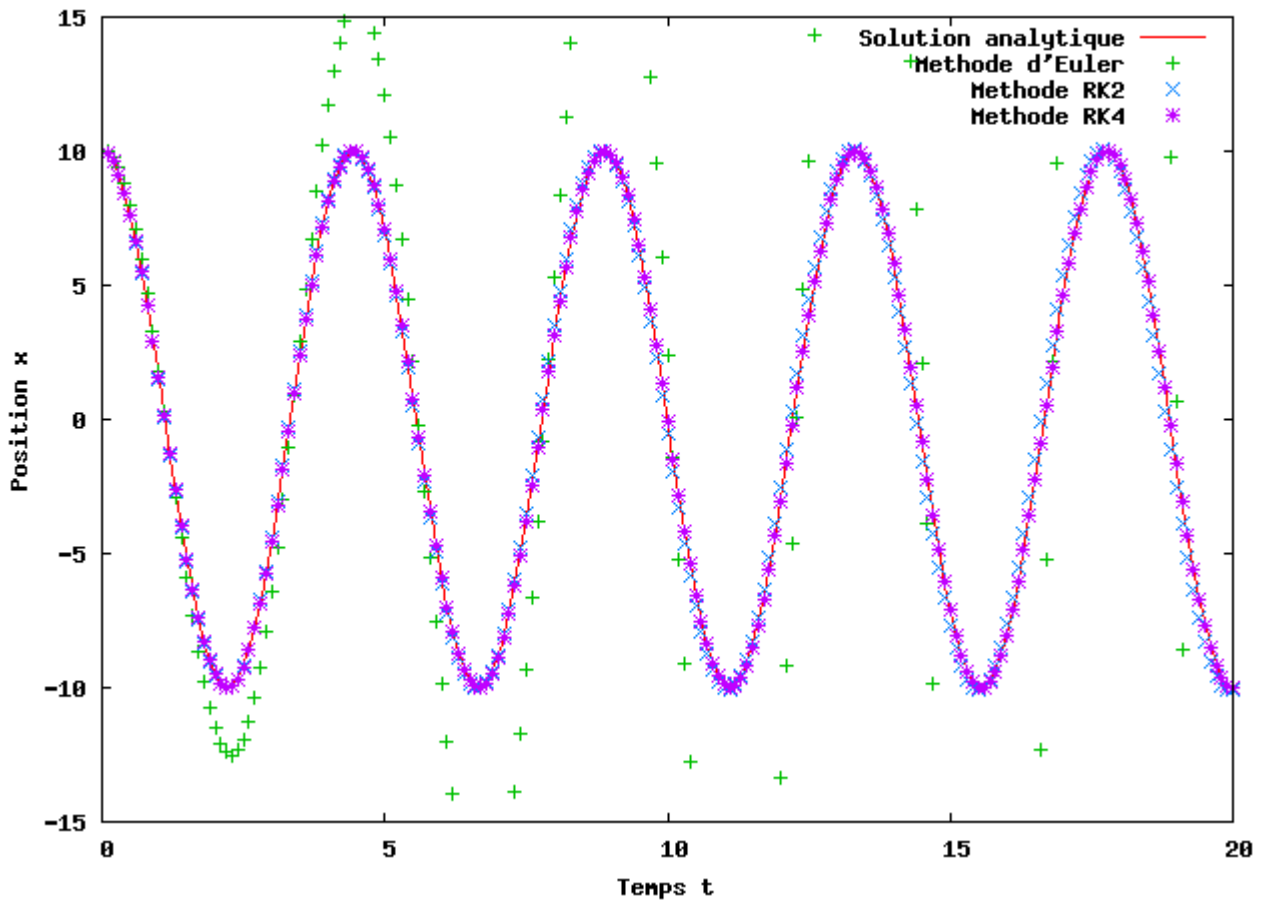
$m \ddot{x} = -kx \Leftrightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0$ . Nous utilisons les programmes 4,5 et 6 pour résoudre cette équation.

Les résultats sont sur les figures de la page suivante.

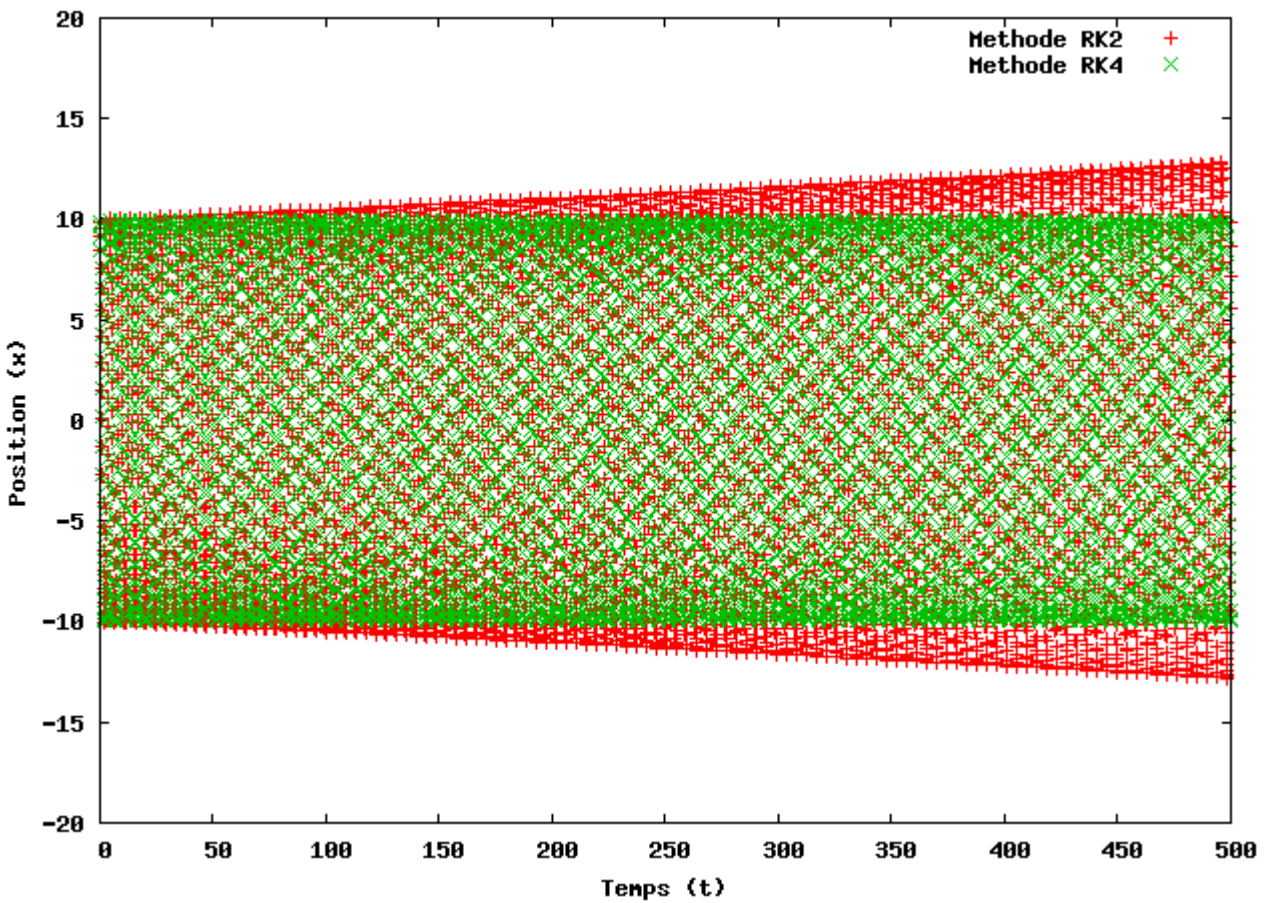
La première figure nous montre les résultats sur un petit intervalle de temps et on voit déjà que la méthode d'Euler est instable, les méthodes RK2 et RK4 semble par contre très bien fonctionner. Sur le deuxième graphe, l'intervalle est plus grand et la méthode RK2 montre ses limites, la méthode RK4 elle fonctionne toujours très bien. C'est celle que l'on va utiliser plus tard.



Oscillateur harmonique



Oscillateur Harmonique



## 5. Dérivation

- Formule d'Euler

Pour dériver une fonction nous pouvons utiliser la formule d'Euler qui découle directement de la définition de la dérivé :  $f'(x) \simeq \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$  où  $h$  est une constante non nulle

Si l'on réalise un développement en série de Taylor de  $f(x+h)$  on obtient

$$f(x+h) = f(x) + h.f'(x) + \frac{h^2}{2}.f''(x) + \dots \quad \text{l'erreur est donc } \frac{h^2}{2}.|f''(x)|$$

- Dérivation au demi-pas

En faisant la même démarche, il est possible d'améliorer cette méthode : c'est la méthode du demi-pas.

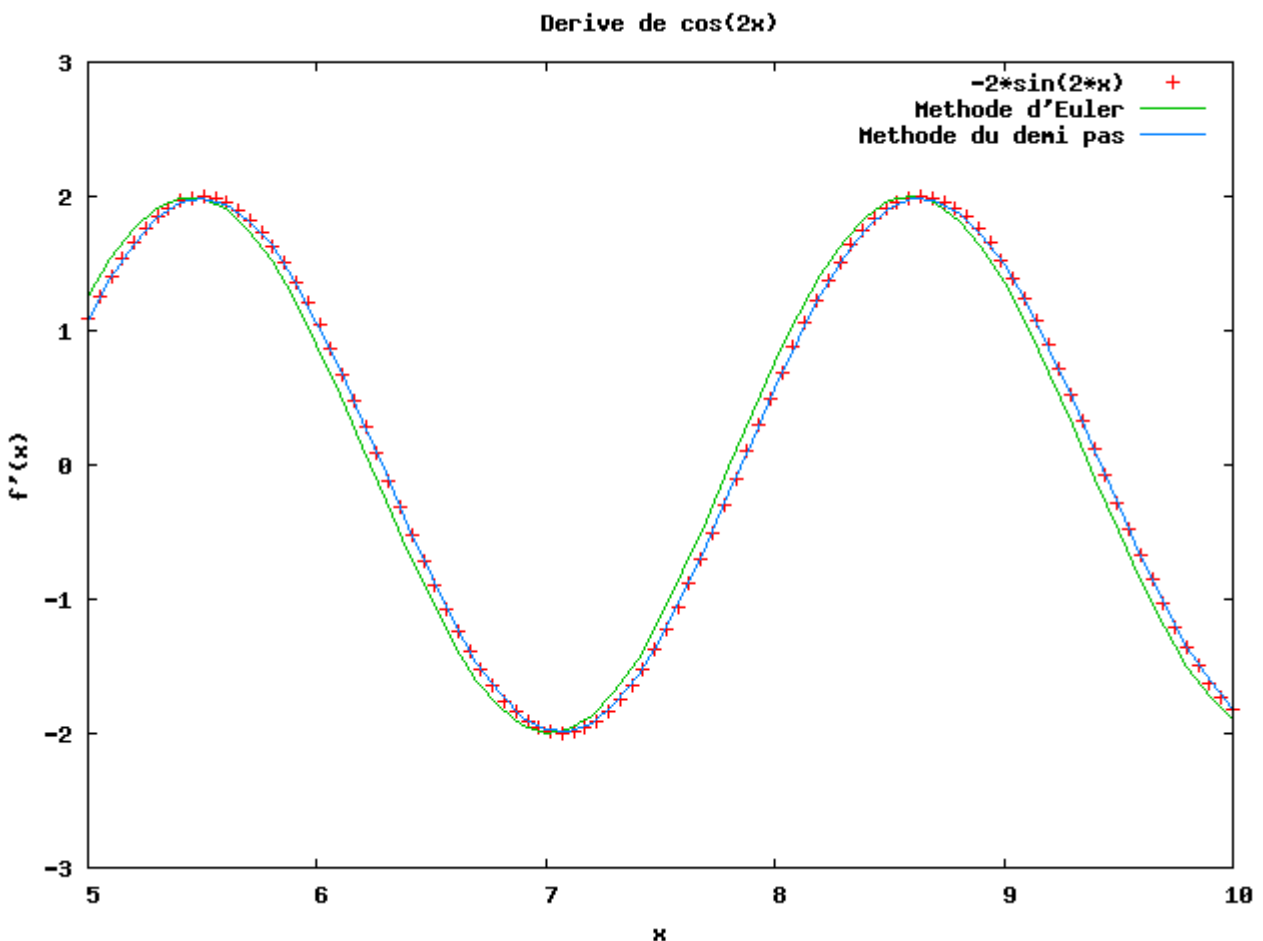
$$f(x+h) = f(x) + h.f'(x) + \frac{h^2}{2}.f''(x) + \frac{h^3}{6}.f'''(x) + \dots$$

$$f(x-h) = f(x) - h.f'(x) + \frac{h^2}{2}.f''(x) - \frac{h^3}{6}.f'''(x) + \dots$$

$$f(x+h) - f(x-h) = 2.h.f'(x) + 2\frac{h^3}{6}.f'''(x)$$

$$d'où f'(x) \simeq \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \quad \text{avec une erreur de } \frac{h^3}{6}.|f'''(x)|$$

Nous allons utiliser les programme 7 et 8 pour comparer ces méthodes avec la solution analytique sur un exemple simple mais ressemblant à celui que nous allons faire plus tard  $f(x) = \cos(wx)$ . On voit que la méthode du demi-pas est bien plus précise : c'est celle que l'on va utiliser.







# IV. Application

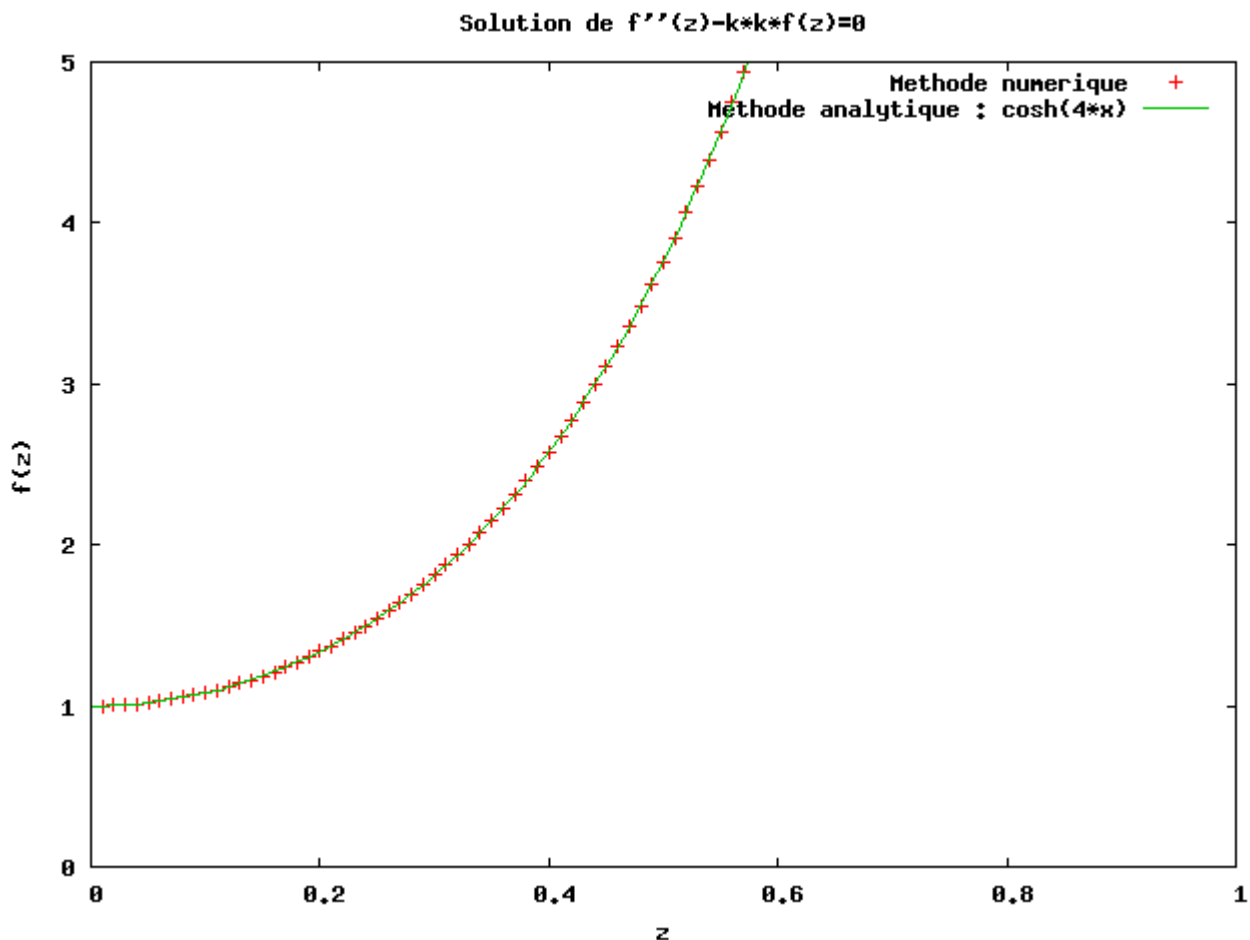
Dans cette partie nous allons d'abord résoudre numériquement les deux étapes « difficiles » de la résolution du problèmes indépendamment et les comparer à celles que nous avons trouver dans la partie analytique afin de valider notre résultat..

Puis, nous allons étudier les solutions trouvés analytiquement en fonction de différents paramètres. L'idéal aurait été de coupler les deux étapes numériques afin d'avoir des solutions  $\eta$  numériques mais ceci est très compliquer à faire en programmation. Par chance, les solutions peuvent être trouvées analytiquement.

## 1. Calculs numériques

- Détermination de  $\phi(z)$  :

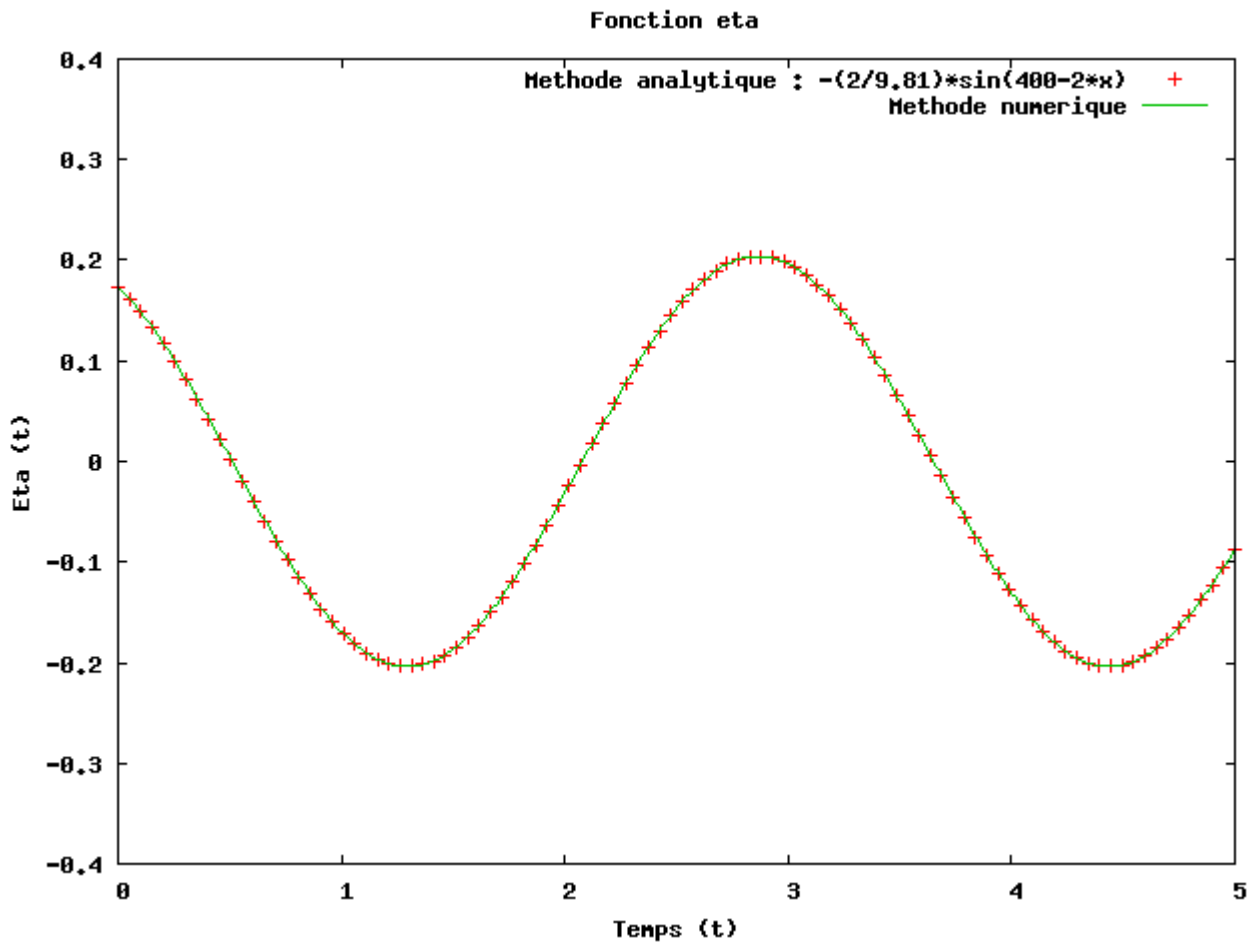
Il s'agit de résoudre  $\phi'' - k^2 \phi = 0$ . Analytiquement la solution (sans conditions) est  $\phi(z) = \cosh(kz)$ , et à l'aide du programme 9, utilisant la méthode RK4 on trouve :



Notre solution s'accorde parfaitement avec le résultat numérique. Tenant compte des conditions aux limites, on prendra  $\phi(z) = \Phi_m \cosh(k(z+H))$ .

- Détermination de  $\eta(x, z)$  :

Par la relation  $\frac{d\Phi}{dt} = -g\eta$ , nous trouvons en utilisant la méthode du demi-pas à  $z=0$  :



Le programme 10 nous montre que le résultat théorique s'accorde bien avec le numérique. À noter que l'on a enlevé les facteurs pour simplifier le programme.

La solution  $\eta$  (niveau de l'eau) d'une fonction  $\Phi = \Phi_m \cosh(k(z+h)) \cos(x \cdot \vec{e}_x - \omega t)$  est bien :

$$\eta = -\Phi_m \frac{\omega}{g} \cosh(kH) \sin(\vec{x} \cdot \vec{k} - \omega t)$$

C'est la fonction que nous allons utiliser dans la suite pour modéliser les vagues.

## 2. Simulation et modélisation

Pour les simulation nous allons utiliser deux profils marins. Le premier est une pente linéaire de 10% et le second est un profil dit « Hawaii » qui est constant jusqu'à 50 m du rivage puis qui monte très rapidement jusqu'au rivage.

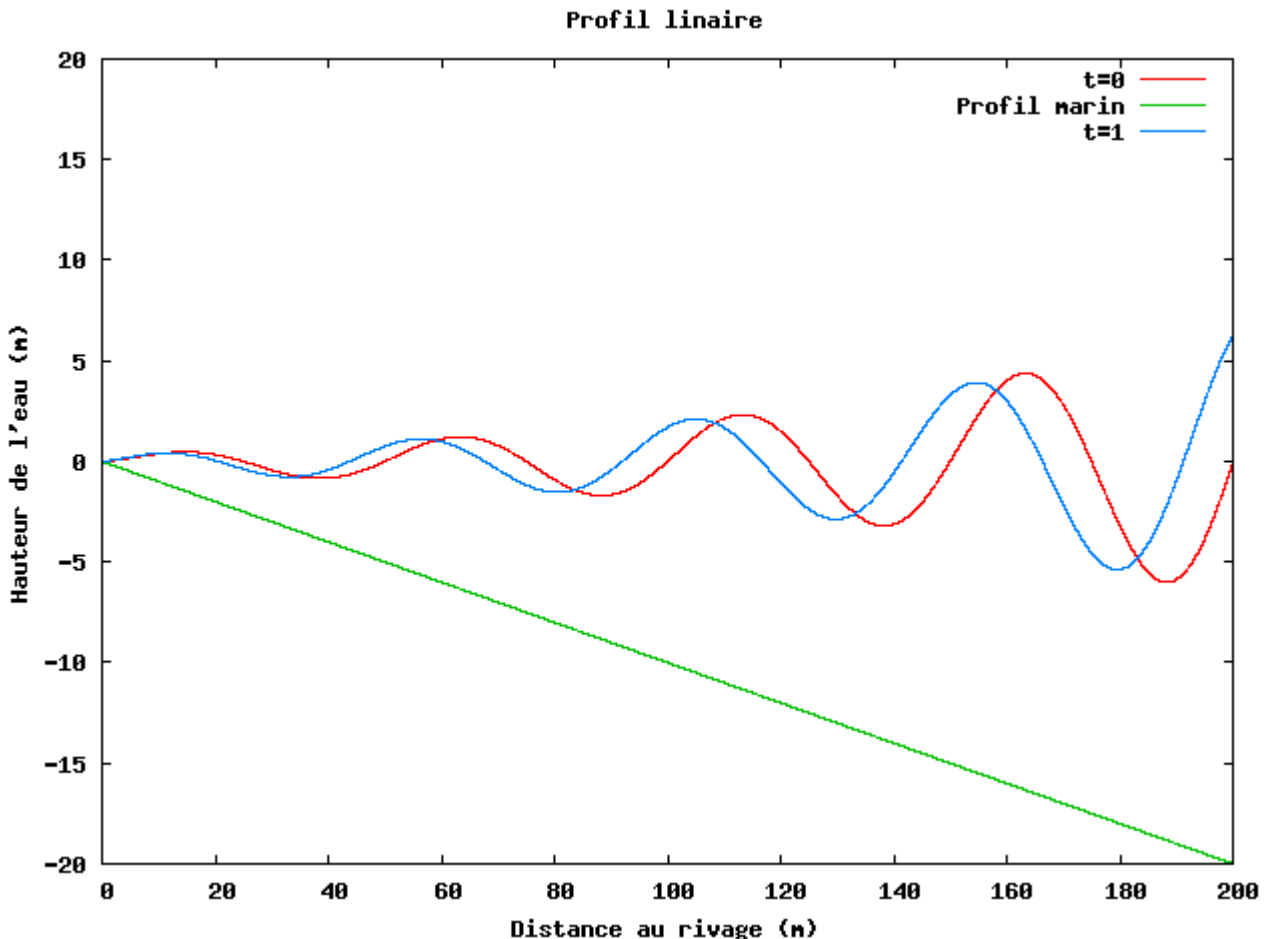
Le programme 11 est paramétré pour le profil linéaire tandis que le programme 12 l'est pour le profil Hawaii. On changera les différents paramètres dans ces programmes pour nos différentes simulations.

On rappelle que lorsque la longueur d'onde de la vague est longue devant la profondeur de l'océan :

$\omega = \sqrt{gHk}$  la vitesse de propagation est  $c_g = c_\phi = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k}}$  où  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  le nombre d'onde,  $H$  est la profondeur et  $g = 9,81$  .

- Profil linéaire :

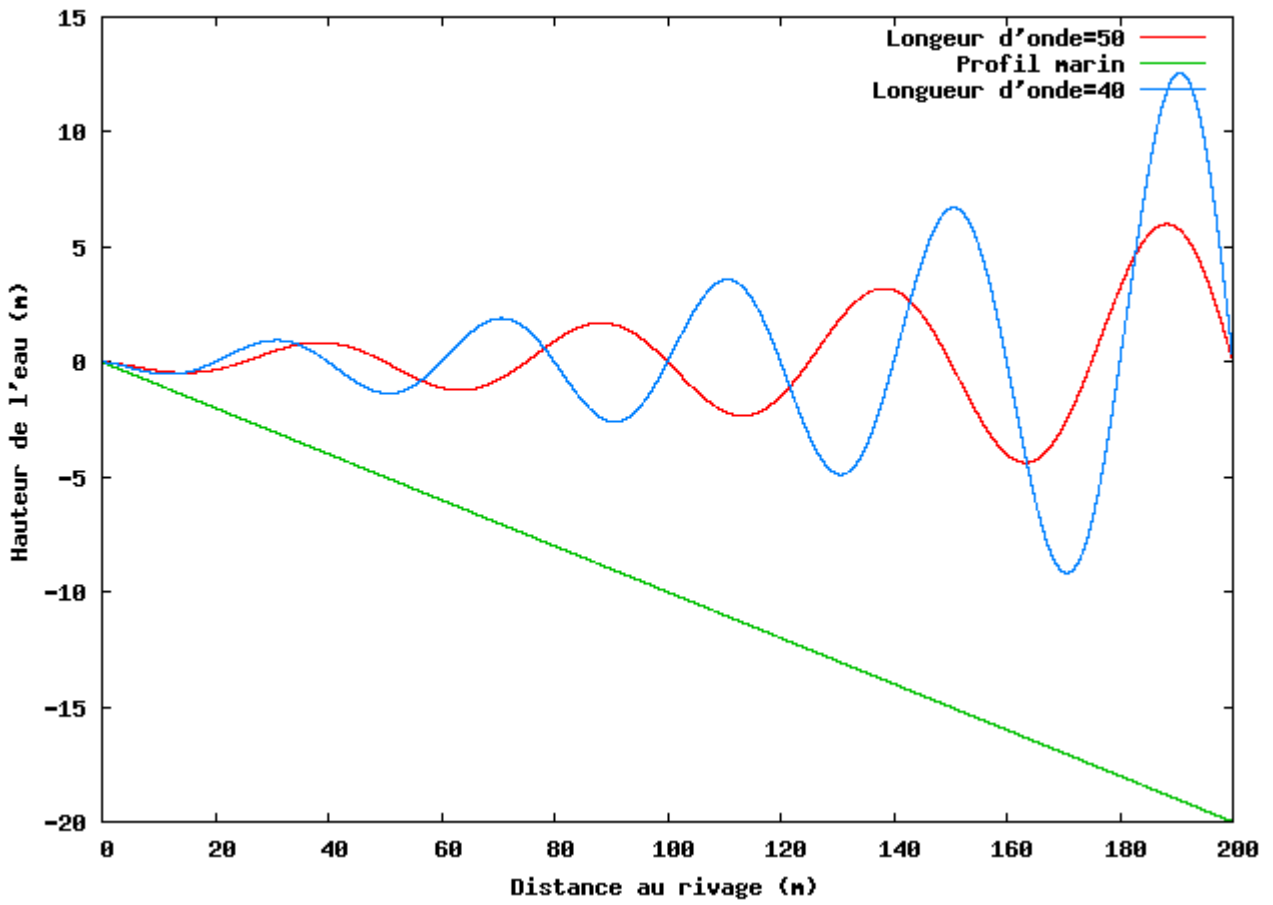
Faisons une simulation pour une longueur d'onde de 50 mètres :



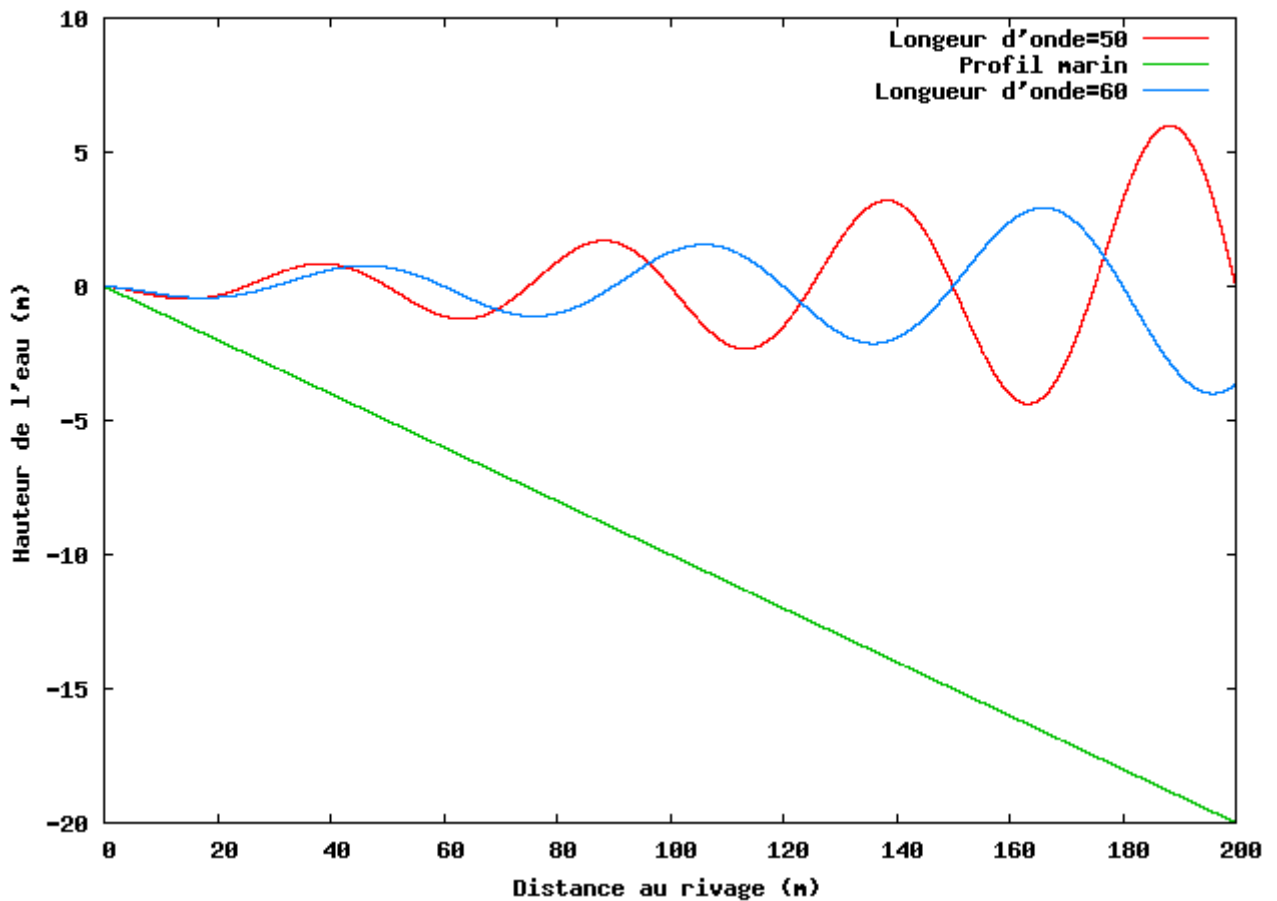
On voit que l'amplitude des vagues décroît avec le profil, ce qui est important pour le déferlement c'est le rapport de l'amplitude sur la profondeur en eau peu profonde et le rapport de l'amplitude sur la longueur d'onde en eau profonde. Nous reviendrons sur le premier point plus tard.

Maintenant nous allons refaire des simulations avec des longueurs d'ondes plus courtes de 40 et 60 mètres :

Comparaison avec differentes longueur d'ondes

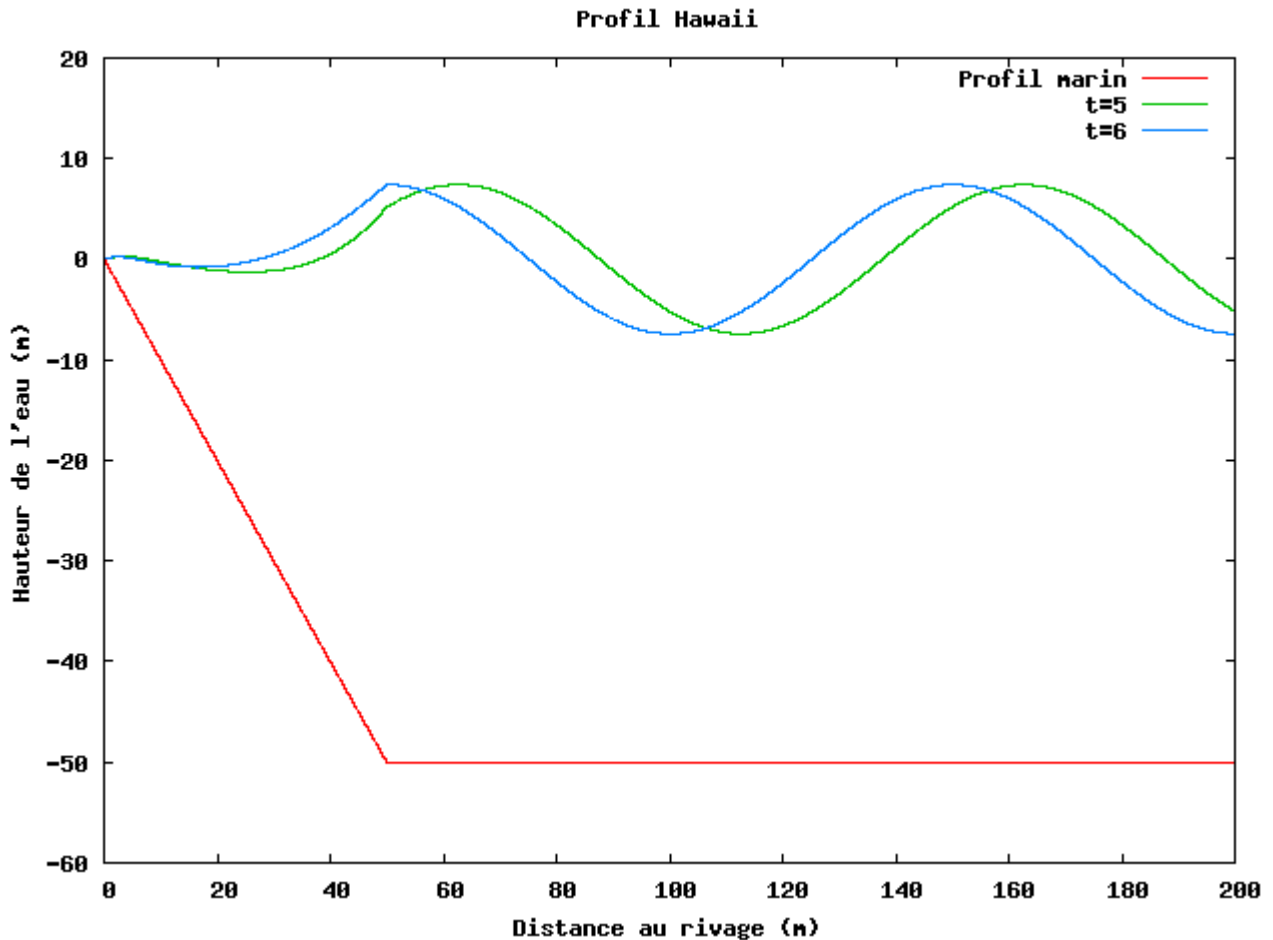


Comparaison avec differentes longueur d'ondes



- Profil Hawaii :

Voici une simulation pour une longueur d'onde de 100 m :



Le profil de surface change radicalement avec le profil marin à partir de 50 mètre du rivage. Ces simulations nous montrent que ce profil marin est plus enclin au déferlement des vagues que le profil linéaire.

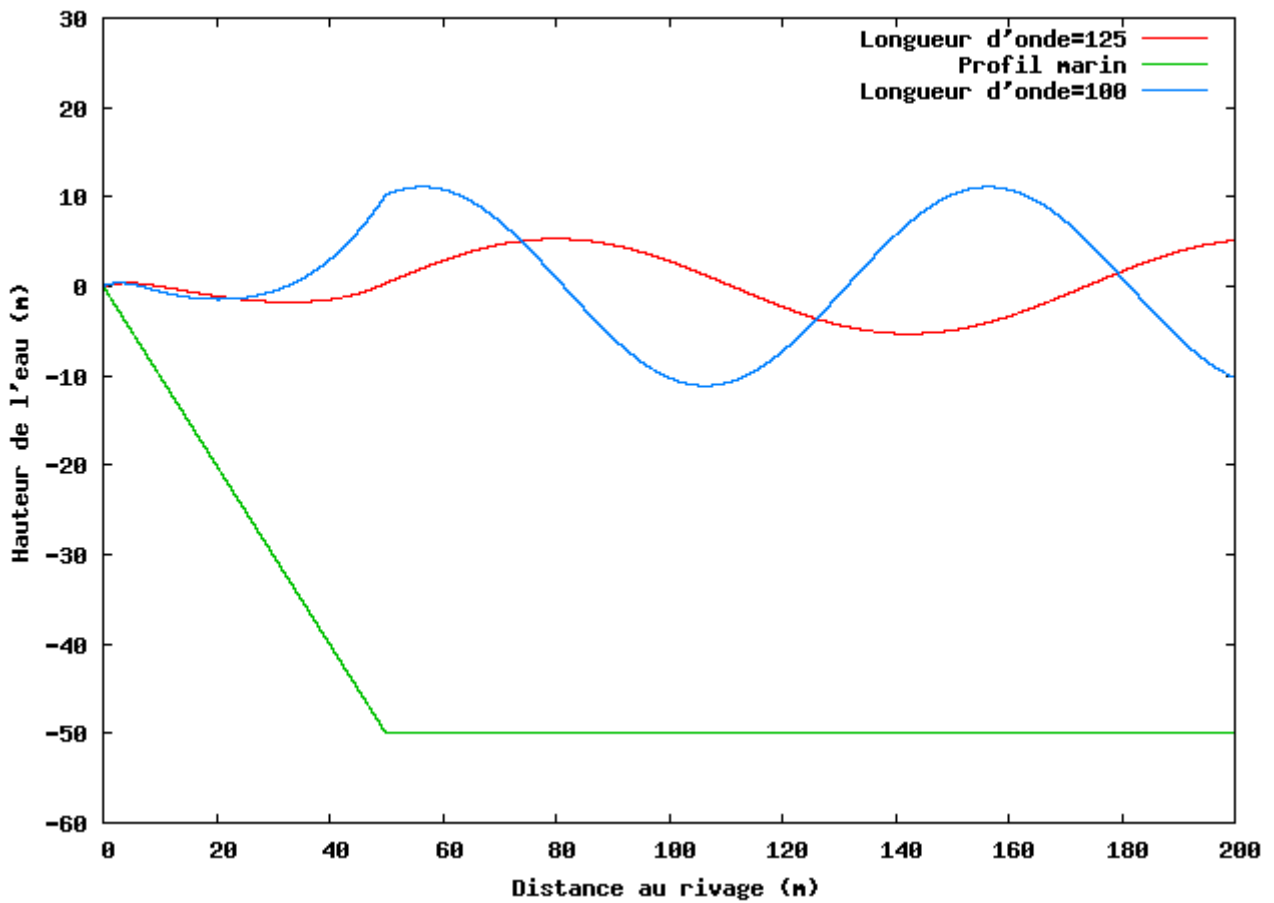
Nous allons maintenant regarder sur les deux graphes de la page suivante comment il se comporte avec deux longueurs d'ondes différentes.

Les deux graphes suivants nous montrent que comme pour le profil linéaire l'amplitude de la vague augmente avec la diminution de la longueur d'onde.

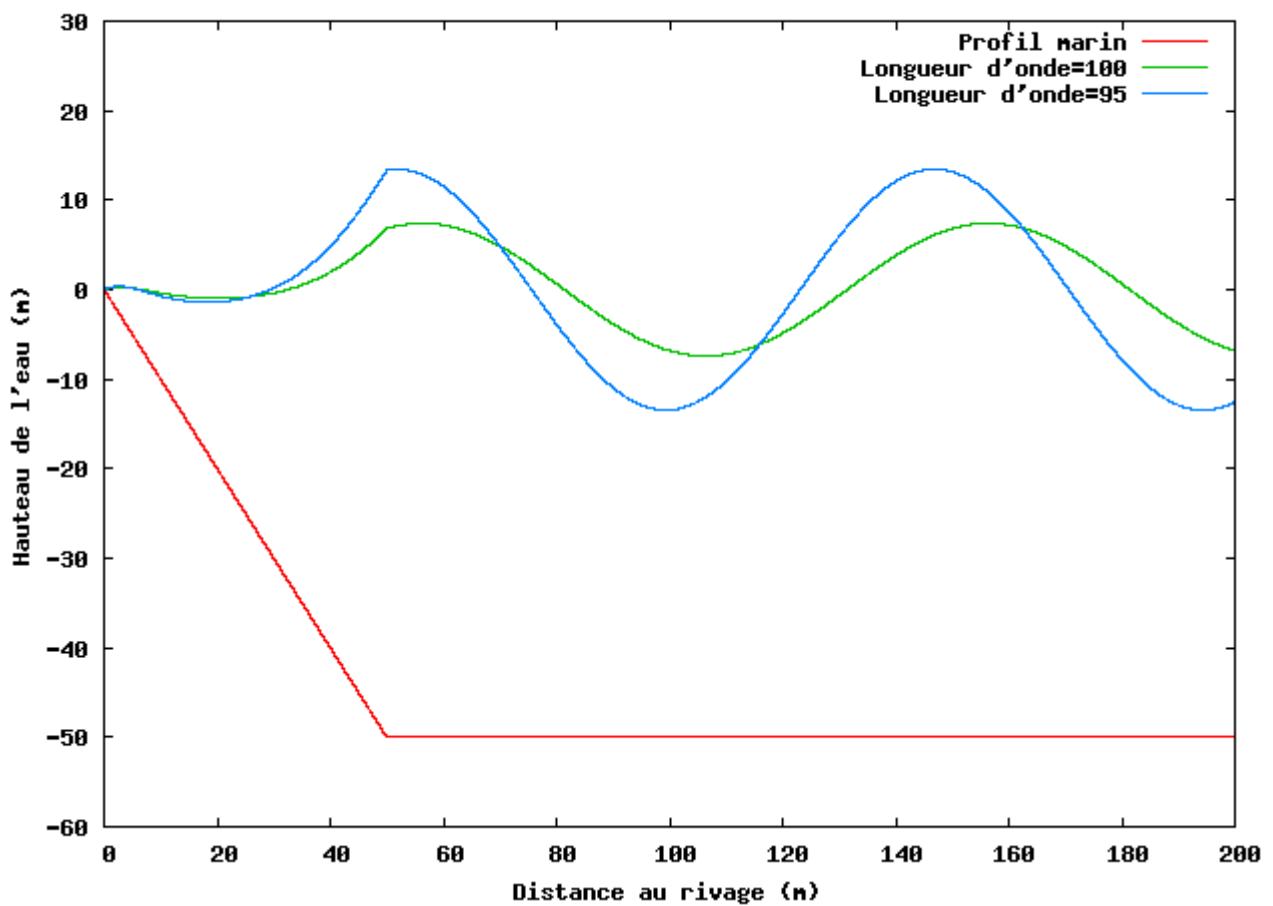
Plus la longueur d'onde est grande, moins il y a de déferlement. La **video attachée** nous montre l'évolution temporelle pour ce profil.

Dans le profil marin précédant nous avons pris des longueurs d'ondes plus petites pour augmenter l'amplitude qui est déjà pourtant faible avec une longueur d'onde de moitié. Ceci est dû au fond marin, étant donné que l'amplitude diminue très vite quand la profondeur diminue à cause du terme  $\cosh(kH)$ .

Comparaison longueur d'ondes

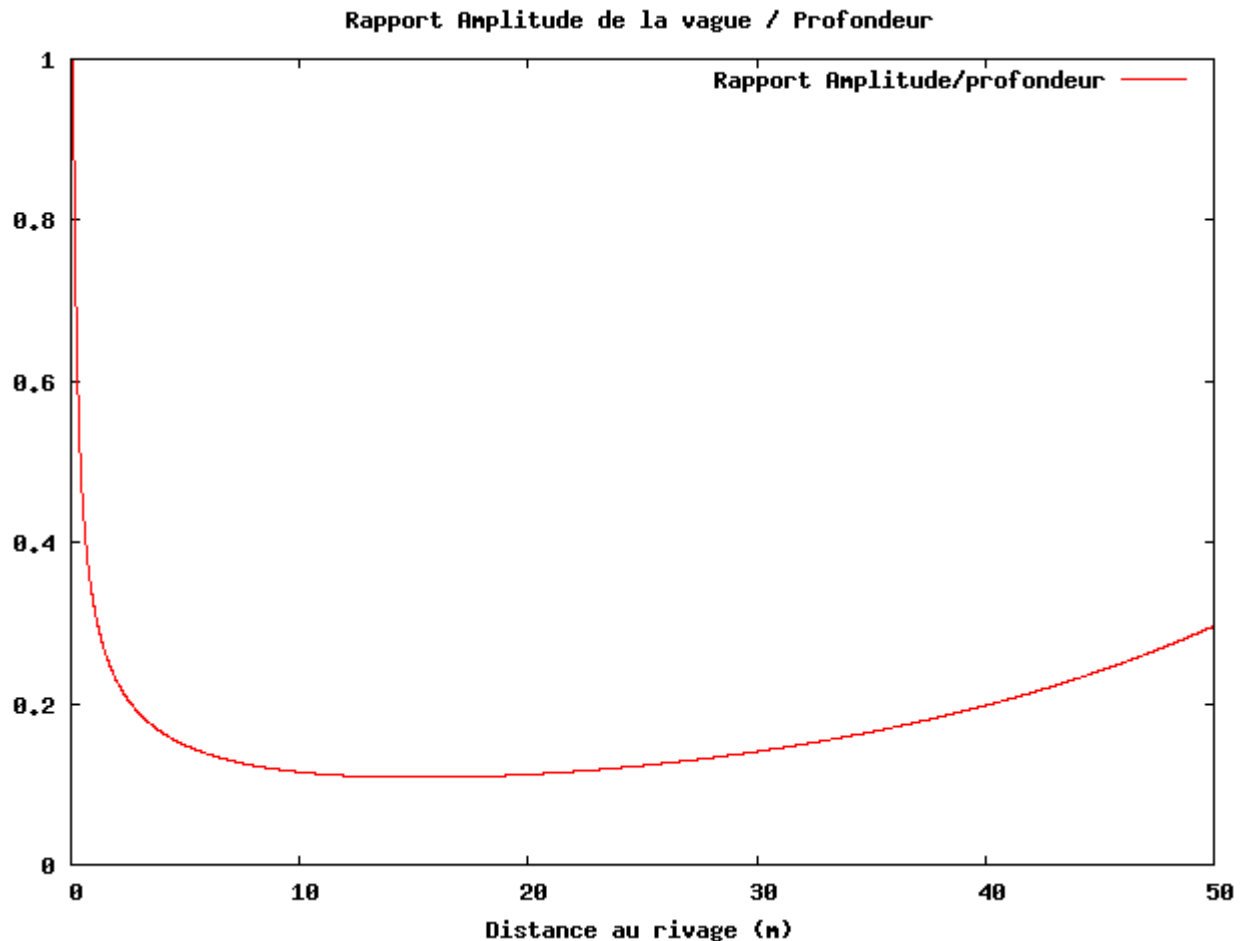


Hawai : Differentes longueurs d'ondes



- Déferlement :

En eau peu profonde le déferlement se produit lorsque le rapport  $\frac{\text{amplitude de la vague}}{\text{profondeur}}$  est inférieur à un seuil critique. Le programme 13 va tracer ce rapport en fonction de la distance au rivage. Nous nous limiterons à une distance de 50 mètres :



La figure montre que contrairement à ce que l'on aurait pu croire, la zone où l'on trouvera le plus de déferlements est comprise entre 10 mètres et 20 mètres.

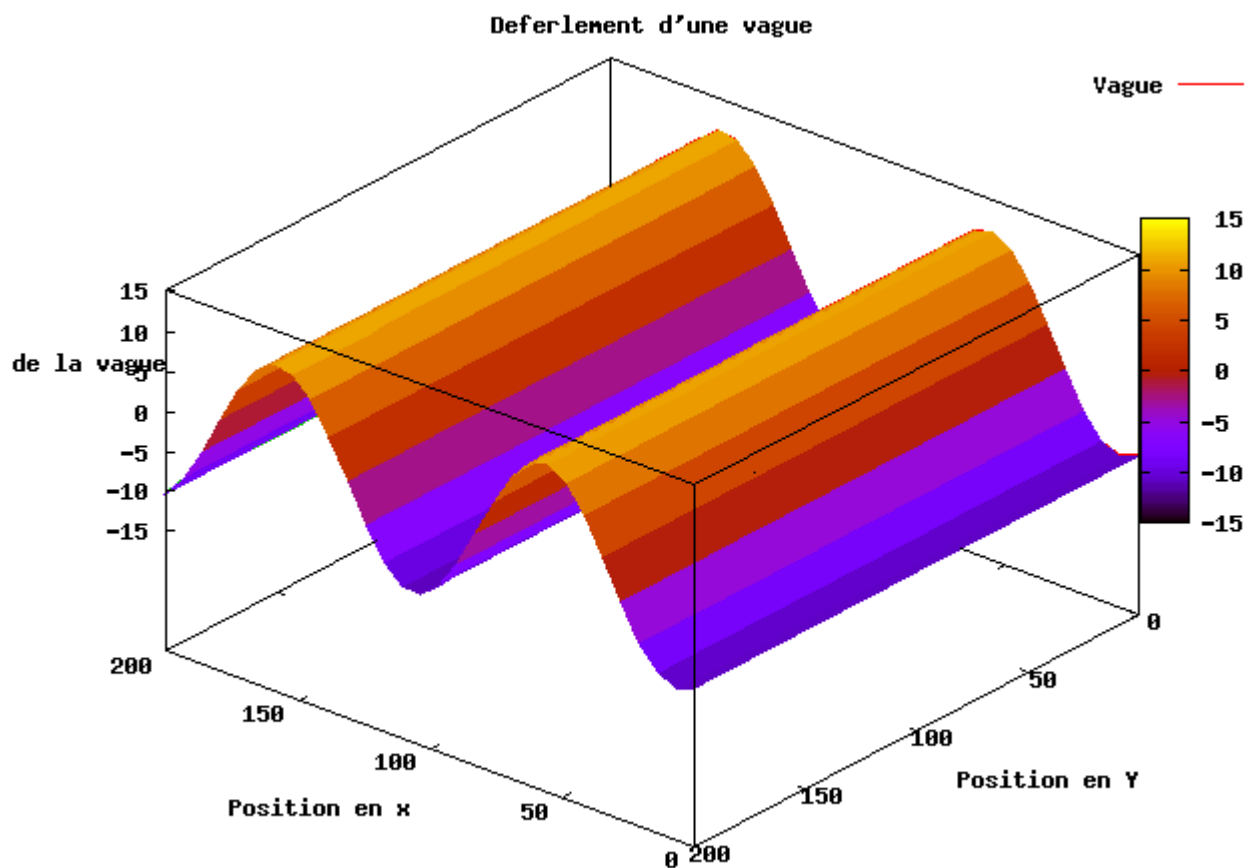
La valeur critique dépend de beaucoup de facteurs dont  $\Phi_m$  que nous avons pris égal à 8 pour notre simulation donc nous ne pouvons pas dire s'il y a déferlement ou pas mais seulement que la zone où on trouvera le plus de déferlements se situe dans cet intervalle.



# V. Conclusion

Nous avons montré que grâce à des méthodes numériques il est possible de résoudre des problèmes tel que le déferlement des vagues. Dans notre cas, nous avons confirmé nos résultats analytiques grâce à ces méthodes mais dans le cas de problèmes plus complexes dont certains sont tout simplement insolubles analytiquement, nous aurions dû utiliser ces méthodes pour la résolution et la simulation du phénomène.

La simulation nous a ensuite montré qu'il a beaucoup plus de chance d'avoir des déferlements de vagues dans un profil de type « Hawaii » que sur un profil linéaire classique.



- **Bibliographie :**
  - Cours Mécanique des fluides de Francis Auclair
  - Cours Méthodes Numériques de M. Fournier
- **Logiciels utilisés**
  - Dev C++ for Windows v4.9.9.2
  - GNUplot win32 v4.2
  - OpenOffice (Math & Writer) v3.0.0

