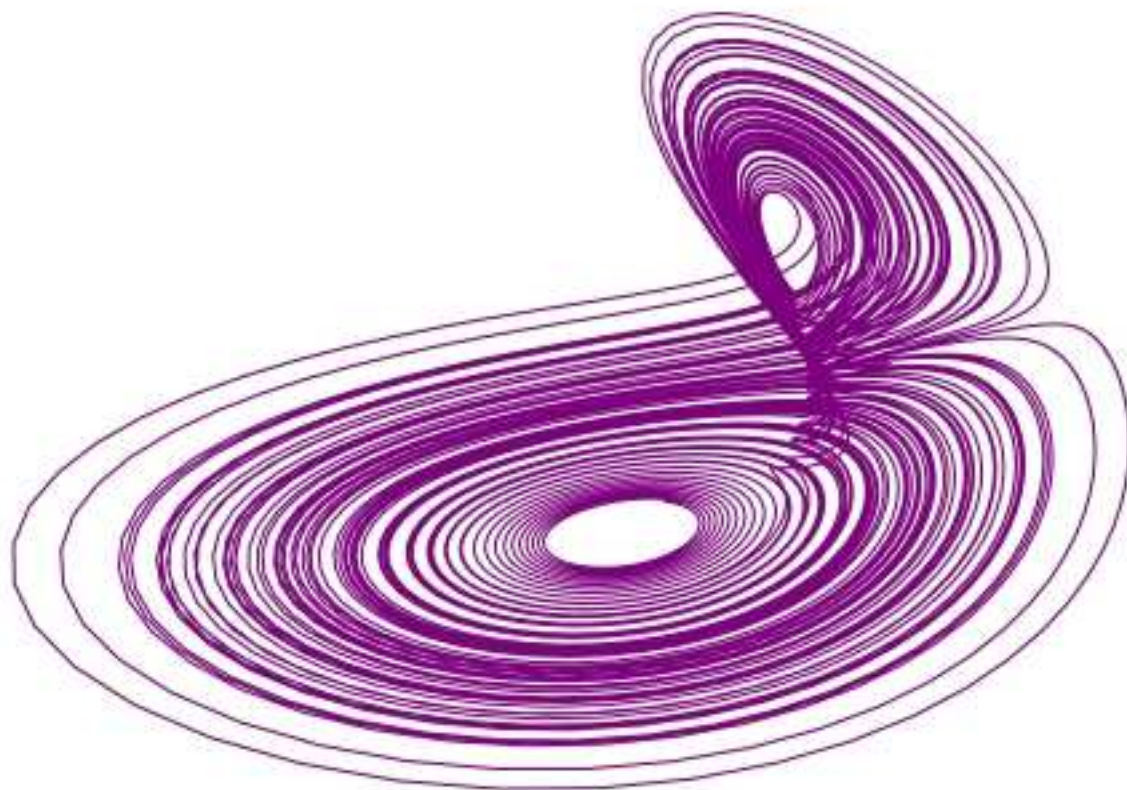


Modèle de Lorenz



Sommaire

I. Introduction

II. Exercices

- Question 1
- Question 2
- Question 3

III. Complément

- Question 1
- Question 2
- Question 3

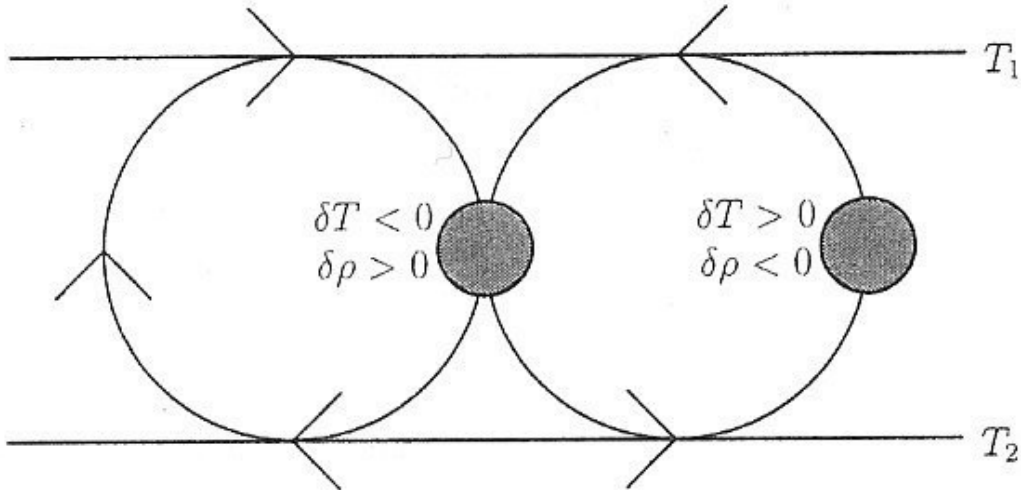
IV. Conclusion

I. Introduction

Edward Lorenz fut un météorologue qui, le premier, mit en évidence le caractère chaotique de la météorologie.

Le couplage de l'atmosphère avec l'océan est décrit par le système d'équations aux dérivées partielles couplées de Navier-Stokes de la mécanique des fluides.

En 1963, Lorenz eut l'idée de chercher un modèle d'équations pour étudier l'instabilité de Rayleigh-Bénard.



Ce modèle a joué un rôle historique important puisque son évolution temporelle fait apparaître un comportement chaotique. De plus, il constitua le premier système dissipatif permettant d'observer un attracteur étrange.

Dans sa version exprimée en paramètres et variables réduits, le système de trois équations différentielles couplées s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P_r (y - x) \\ \frac{dy}{dt} = rx - xz - y \\ \frac{dz}{dt} = xy - bz \end{cases}$$

où P_r désigne le nombre de Prandtl (qui sera pris égal à 10 dans les simulations), $b = 8/3$ et r est le nombre de Rayleigh réduit.

Nous allons étudier à l'aide du programme Lorenz.c les différents portraits de phases obtenus pour différentes valeurs du paramètre r .

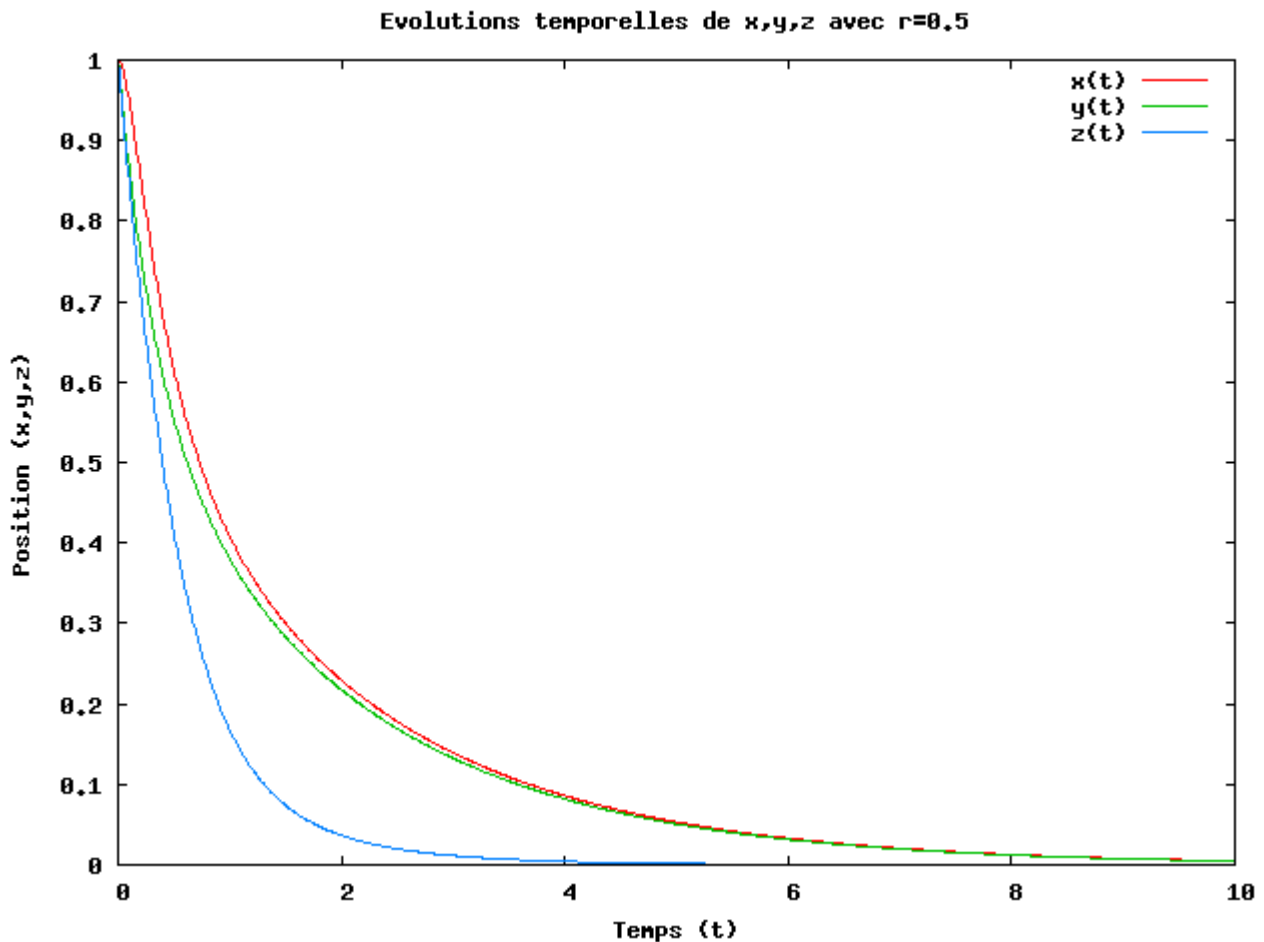
La modélisation comprendra trois étapes : sur un premier schéma, nous trouverons les évolutions temporelles des variables x et z . Nous décrirons les graphes observés et on liera les comportements temporels aux résultats analytiques trouvés dans la partie **III**. Le deuxième graphique représente une projection de l'espace des phases et le troisième visualise pour les trois coordonnées de l'espace.

II. Exercices

- Question 1

Dans cette question nous étudions le modèle de Lorenz pour $0 < r < 1$

Nous commençons avec la condition initiale $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$ avec $r = 0,5$:



Avec ces conditions initiales, les trois variables convergent vers le $(0,0,0)$. Pour cette valeur de r .

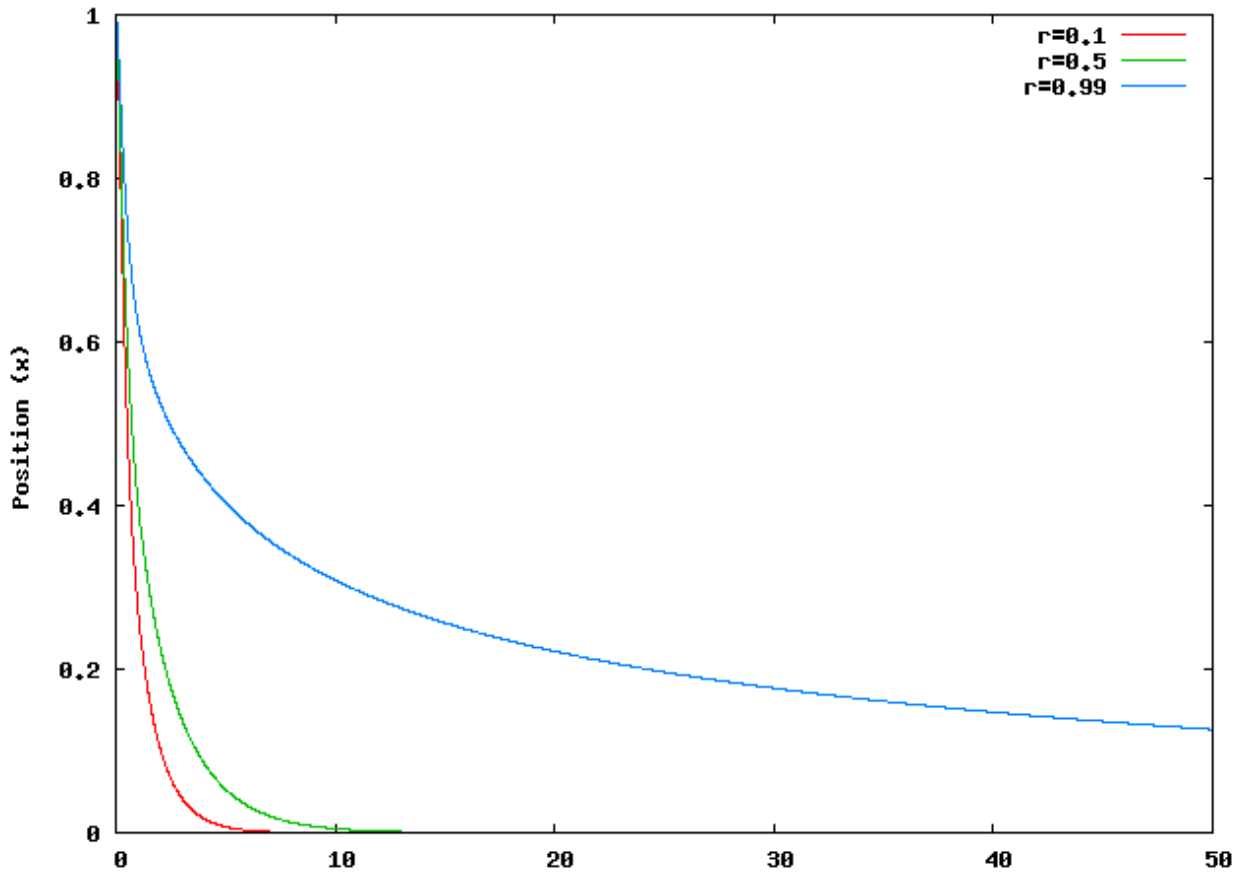
Pour la suite, nous n'étudierons que les variables $x(t)$ et $z(t)$, $y(t)$ ayant un comportement proche de $x(t)$.

Avant de changer les conditions initiales, nous allons changer la valeur de r tout en restant dans le cas $0 < r < 1$ et voir ce qui se passe.

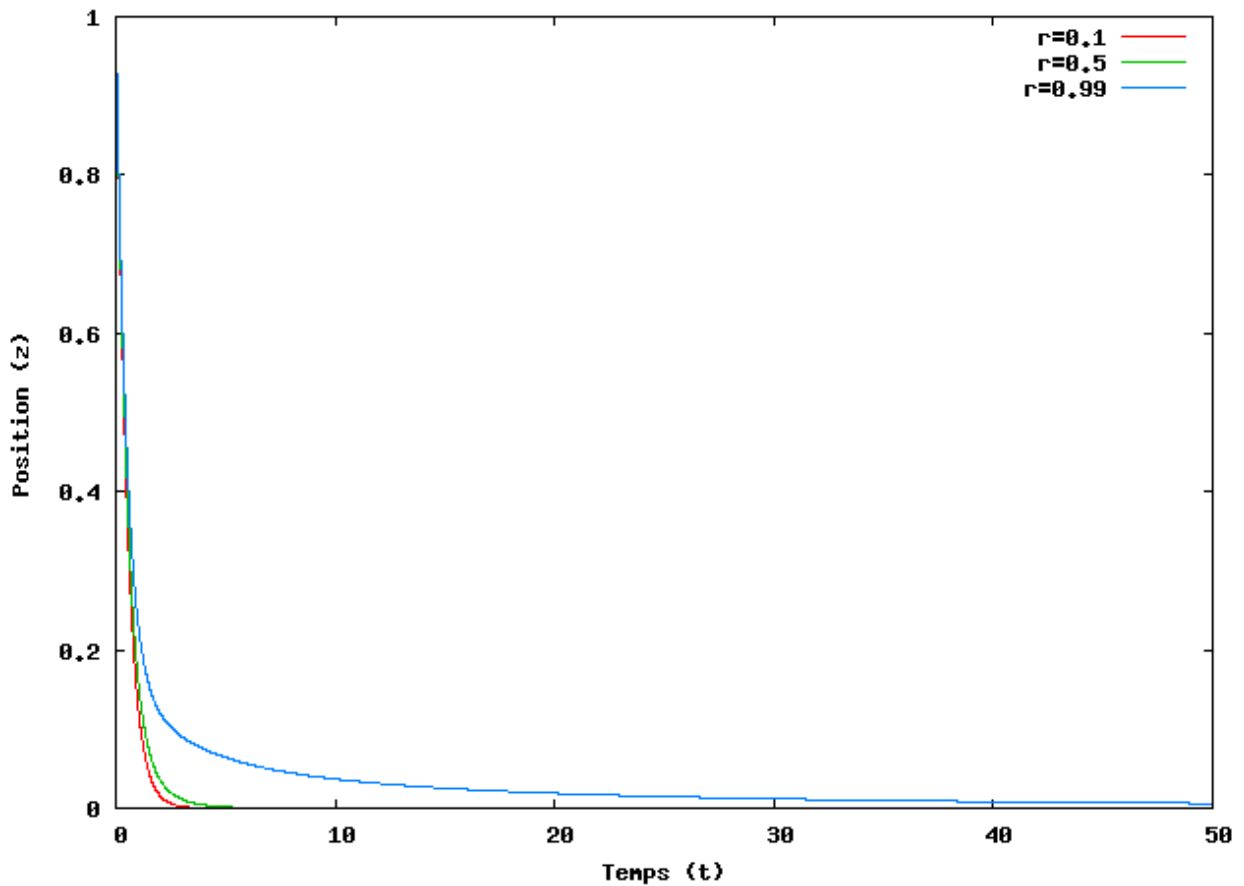
Les deux graphes de la page suivante montrent que, pour les trois valeurs de r , les deux variables tendent toujours vers 0 lorsque t augmente. Notons aussi que plus r est petit, plus $x(t)$ et $z(t)$ tendent rapidement vers 0.

En étudiant la matrice jacobienne du point $(0,0,0)$, nous montrerons que les modules des valeurs propres $|\lambda_i|$ sont maximaux pour $r \rightarrow 0$ (et minimaux pour $r \rightarrow 1$)

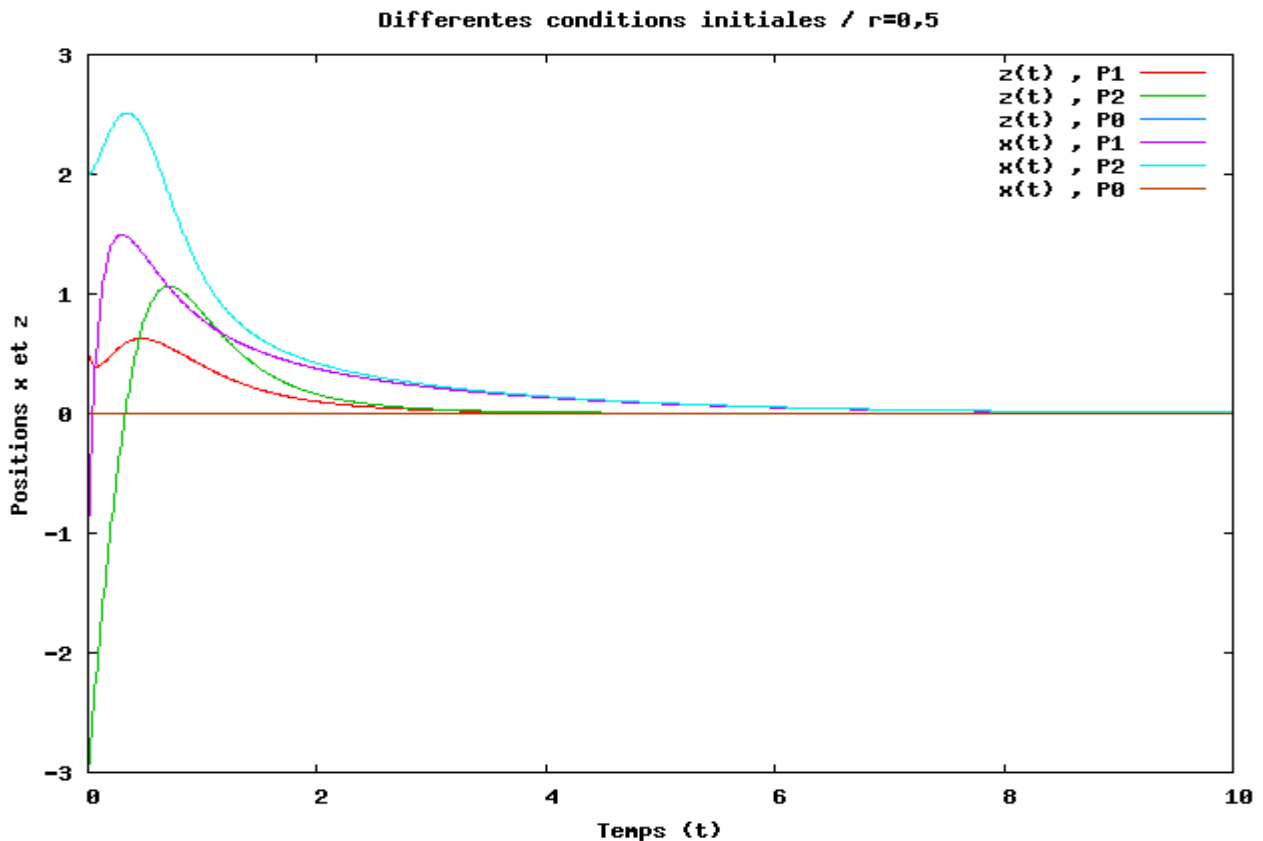
$x(t)$ pour différentes valeurs de r



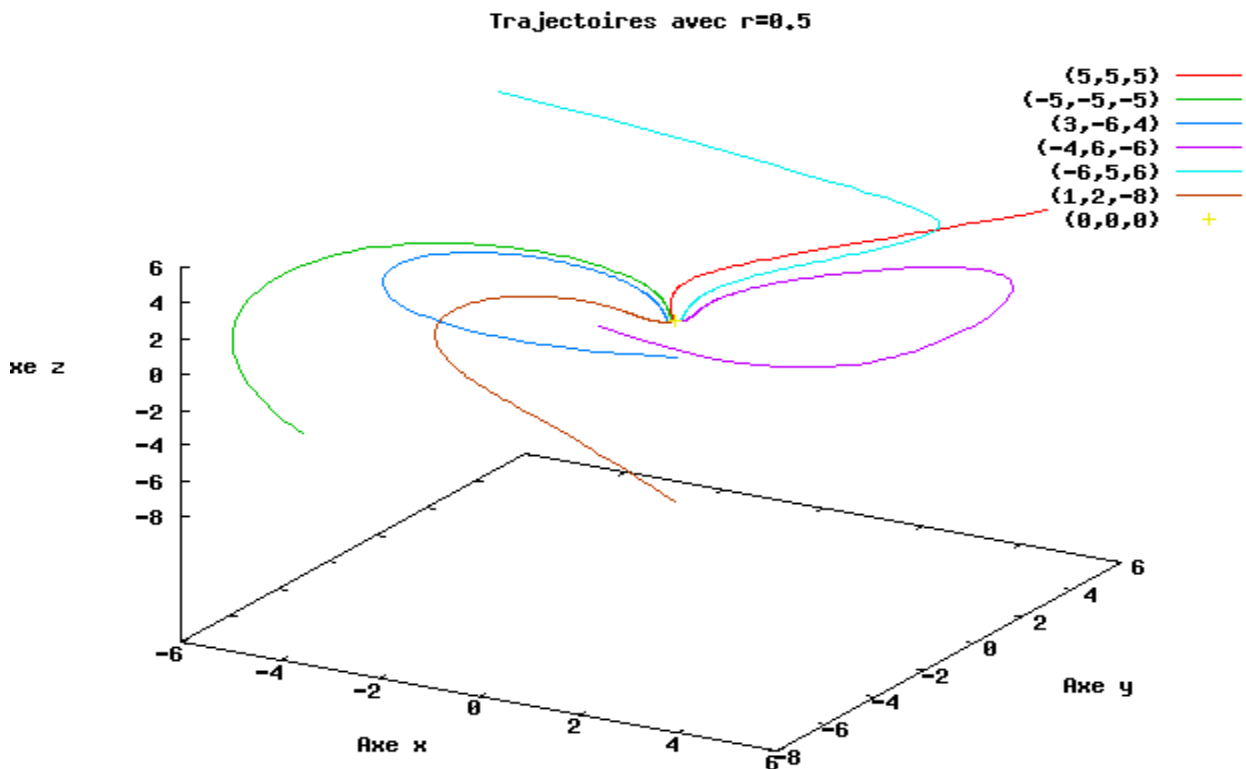
$z(t)$ pour différentes valeurs de r



Nous allons nous remettre à $r=0,5$ avec trois conditions initiales différentes $P_0=(0,0,0)$ $P_1=(-1,2,1/2)$ $P_2=(2,2,-3)$:

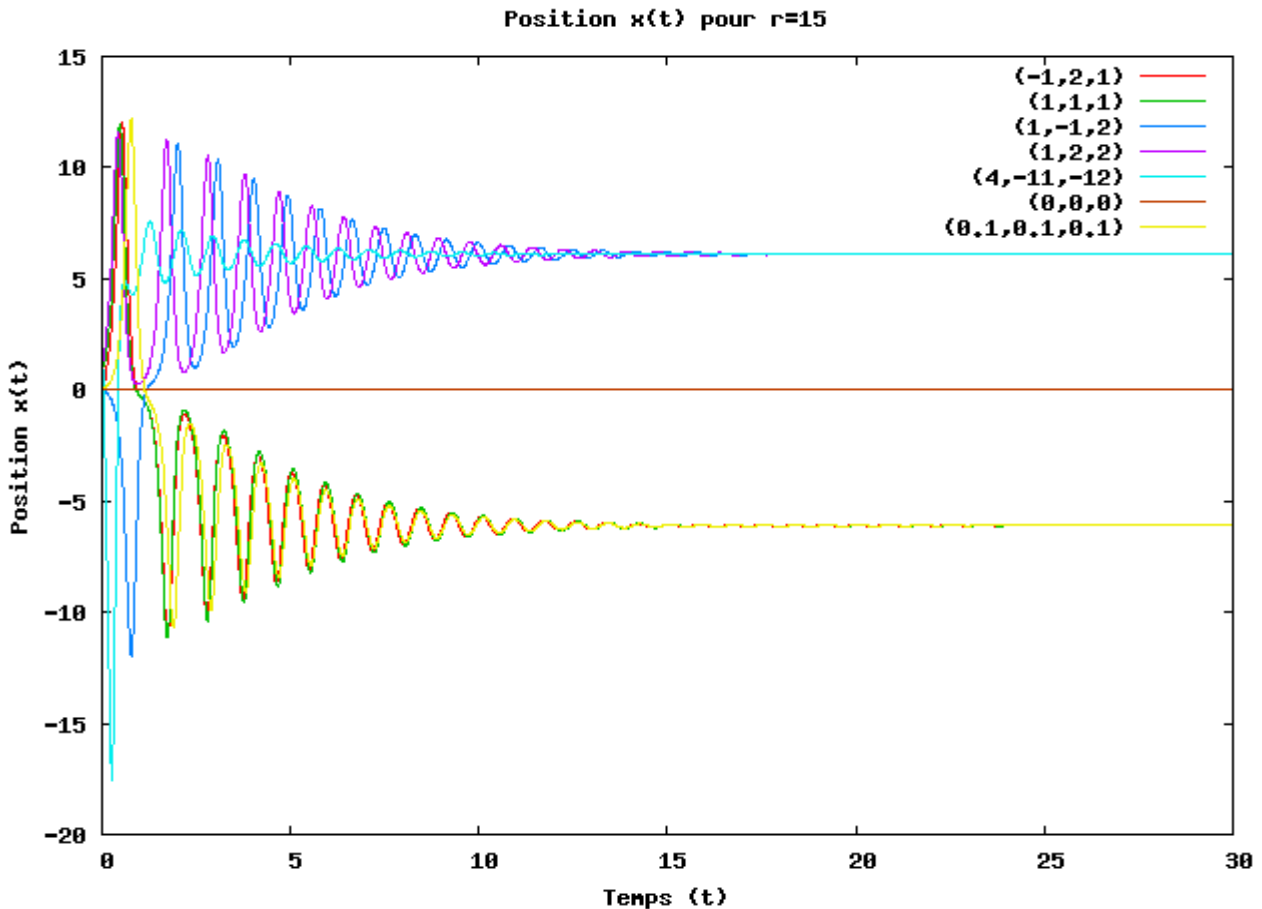


Le point $P_0 = (0,0,0)$ est un **point fixe**, il est invariant dans le temps. De plus, quelque soient leurs conditions initiales, les points convergent vers ce point fixe. C'est donc un **point fixe stable** et il est **unique**. De plus, les trajectoires font penser à un **noeud**. On aussi peut visualiser les trajectoires en trois dimensions obtenues avec des conditions initiales différentes :



• Question 2

Ici, nous devons nous placer à $1 < r < 24$. Nous choisissons $r = 15$.



Pour différentes conditions initiales, les trajectoires convergent vers deux valeurs de x différentes, nous montrerons qu'en fait les trajectoires convergent vers $x_{F1} = \sqrt{b(r-1)} \simeq 6,11$ ou $x_{F2} = -\sqrt{b(r-1)} \simeq -6,11$. De plus le point $(0,0,0)$ est toujours un point fixe mais n'est plus stable, pour une condition initiale proche $(1/10, 1/10, 1/10)$, la trajectoire diverge de $(0,0,0)$ et converge vers $x_{F1,2}$. Il est donc **instable**.

Nous voyons sur le premier graphe de la page suivante que les positions sur z convergent par contre vers une seule valeur. Cette valeur est $z_F = r - 1 = 14$.

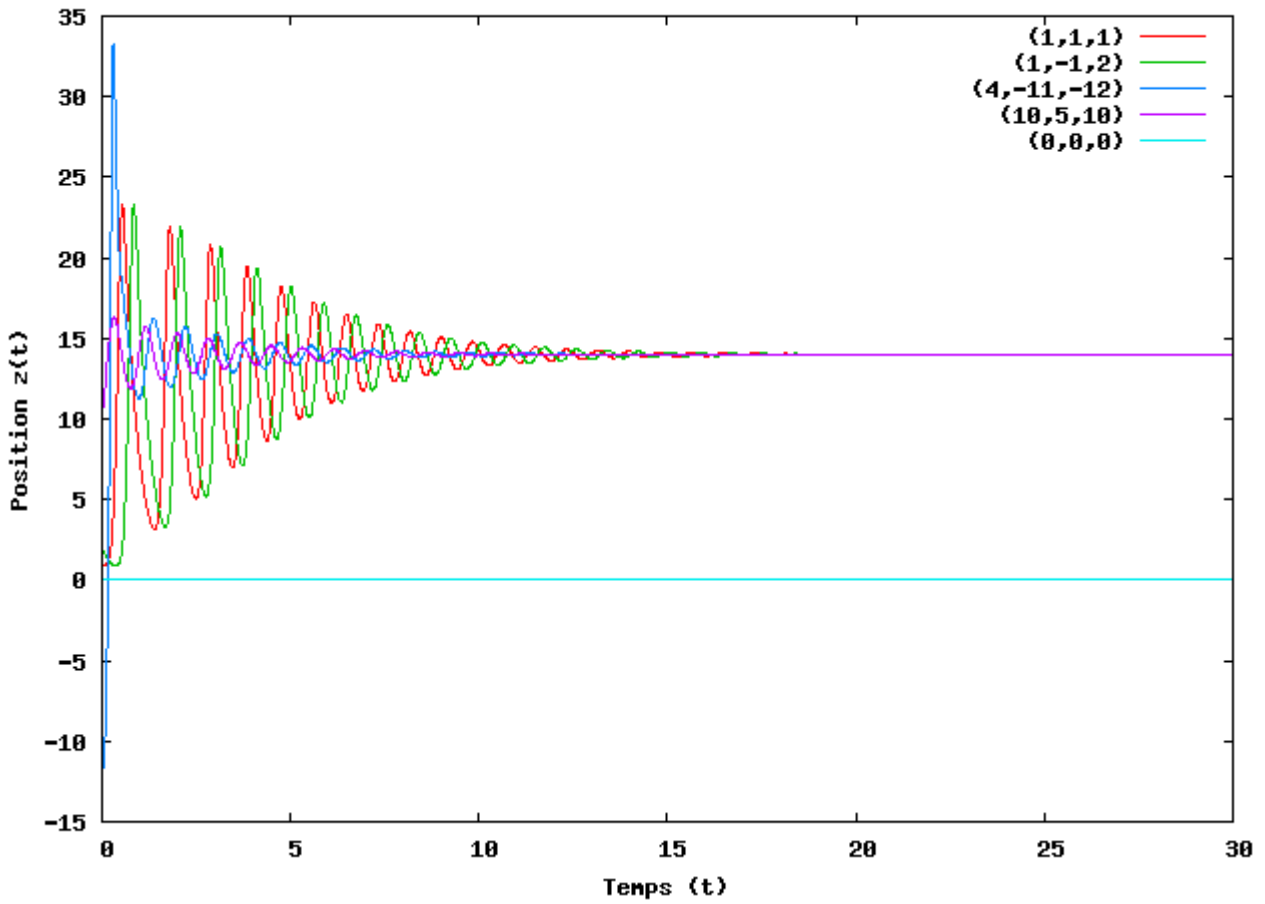
Plus généralement, nous montrerons que pour $1 < r < 24$ le modèle de Lorenz admet 3 points fixes:

$$P_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{b(r-1)} \\ \sqrt{b(r-1)} \\ r-1 \end{pmatrix} \quad P_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{b(r-1)} \\ -\sqrt{b(r-1)} \\ r-1 \end{pmatrix} \text{ qui sont stables et } P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ qui est instable.}$$

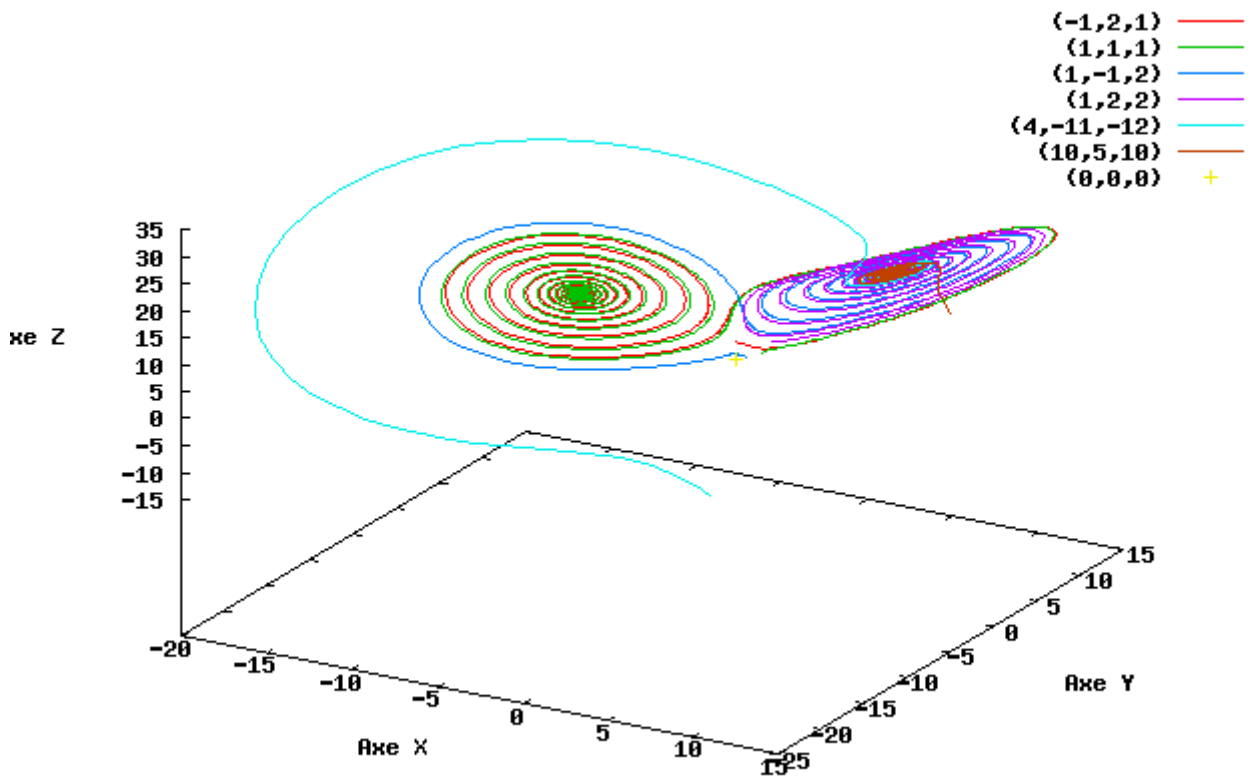
Il est important de remarquer que les trajectoires convergent vers les points fixes **P1** et **P2** en oscillant. Ceci est dû au fait que pour $r = 15$ les points fixes **P1** et **P2** sont des **foyers stables**. On le voit très bien en regardant les trajectoires en trois dimensions sur le deuxième graphe de la page suivante où les trajectoires « orbitent » autour des points fixes et s'en approchant.

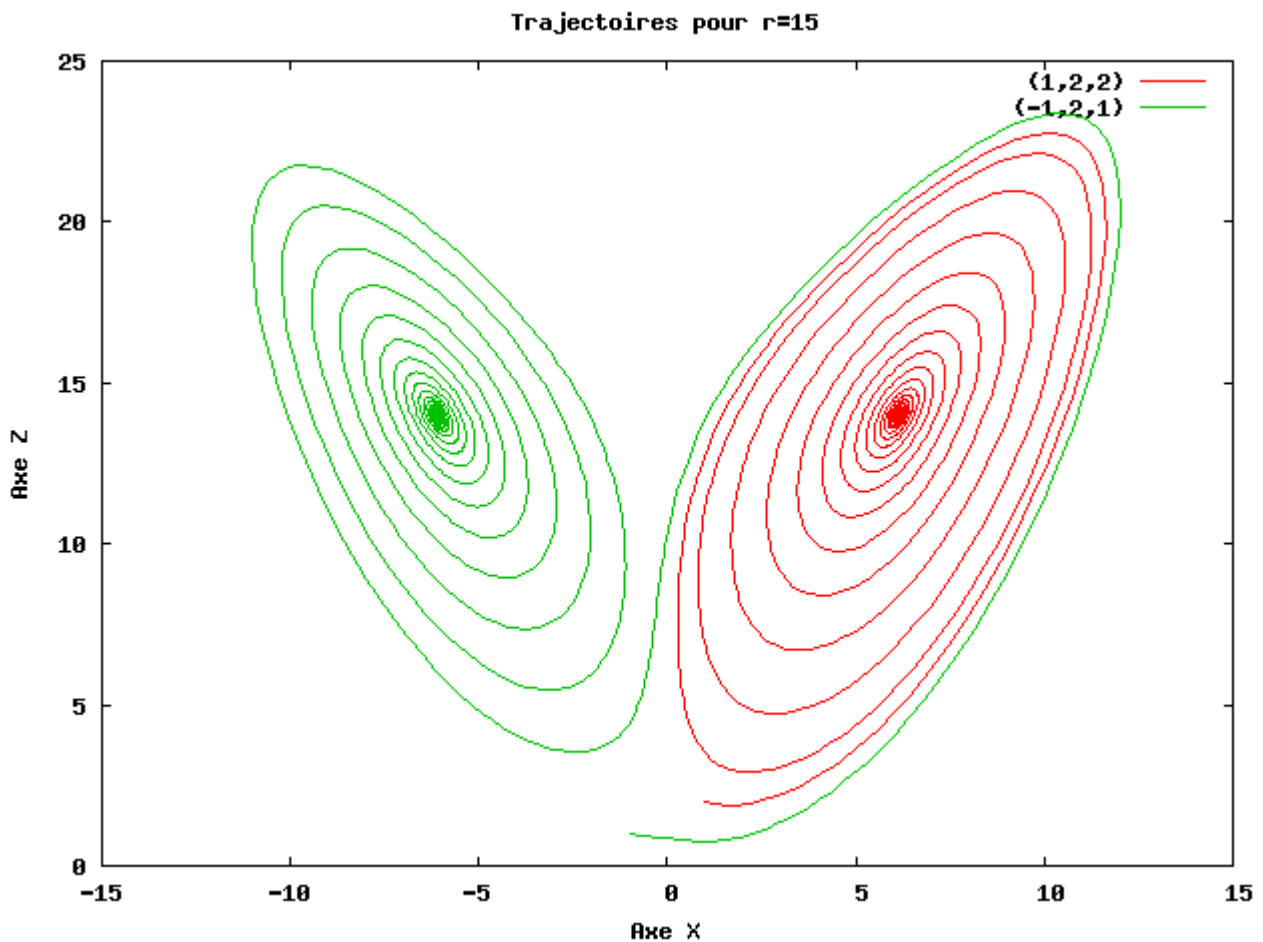
Notons aussi que le système est déjà **chaotique**, il est très sensible aux conditions initiales, pour des conditions initiales très peu différentes, les trajectoires peuvent converger vers l'un et l'autre des points fixes.

Position $z(t)$ pour $r=15$

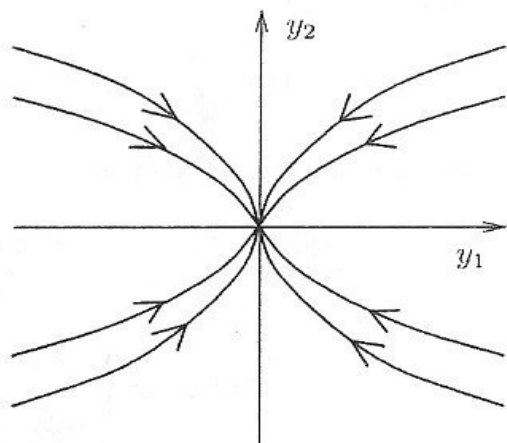


Trajectoires pour $r=15$



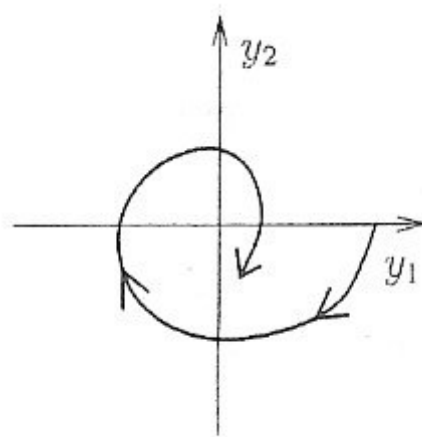


Ci-dessus, nous avons tracé la projection des trajectoires sur le plan (x,z) . Les deux **foyers stables** sont bien visibles. Nous verrons dans la partie analytique que pour des valeurs de r légèrement supérieures à 1 les points **P1** et **P2** sont des **noeuds stables** et qu'ils deviennent des foyers stables lorsque r augmente.



$$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$$

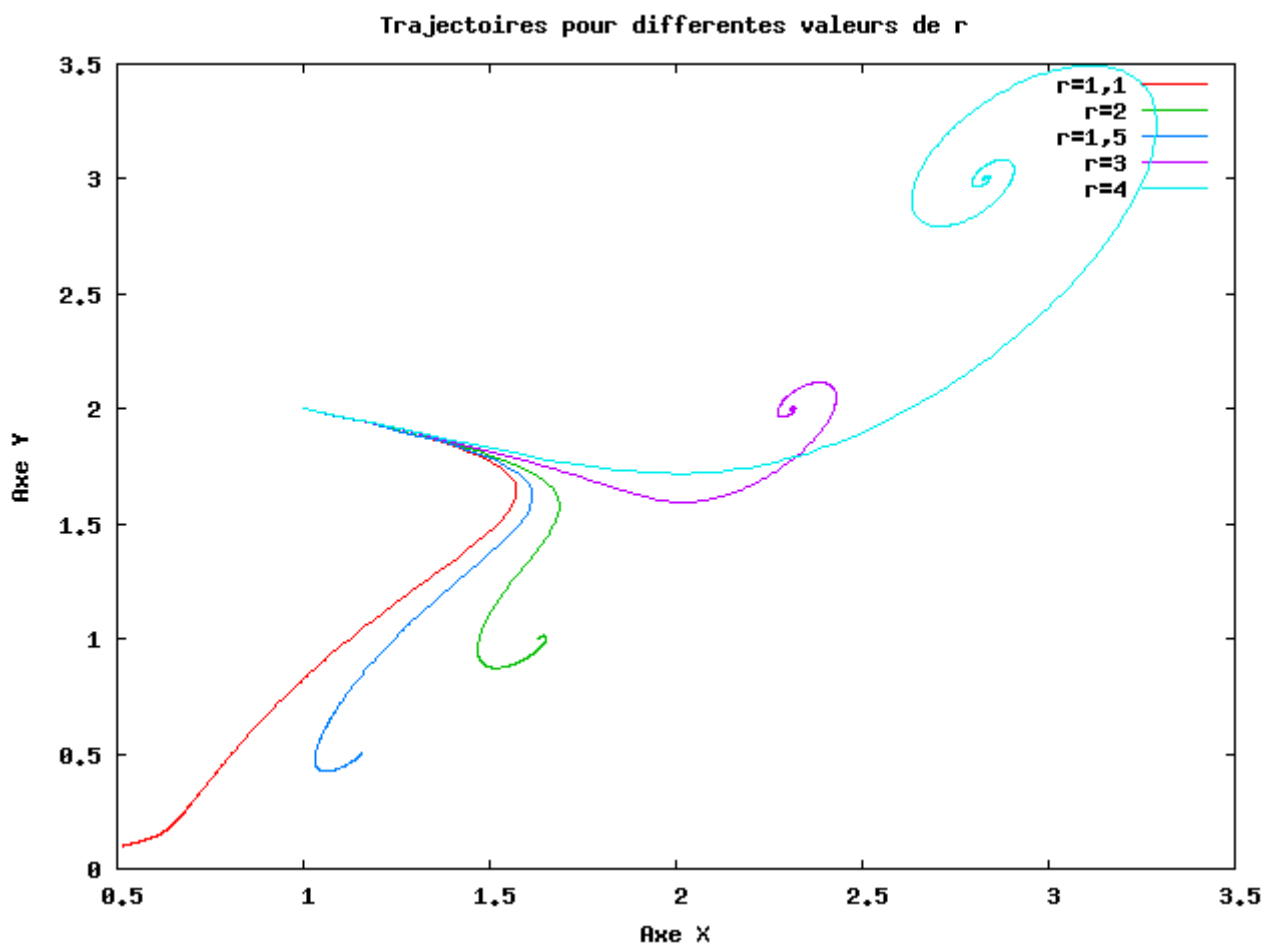
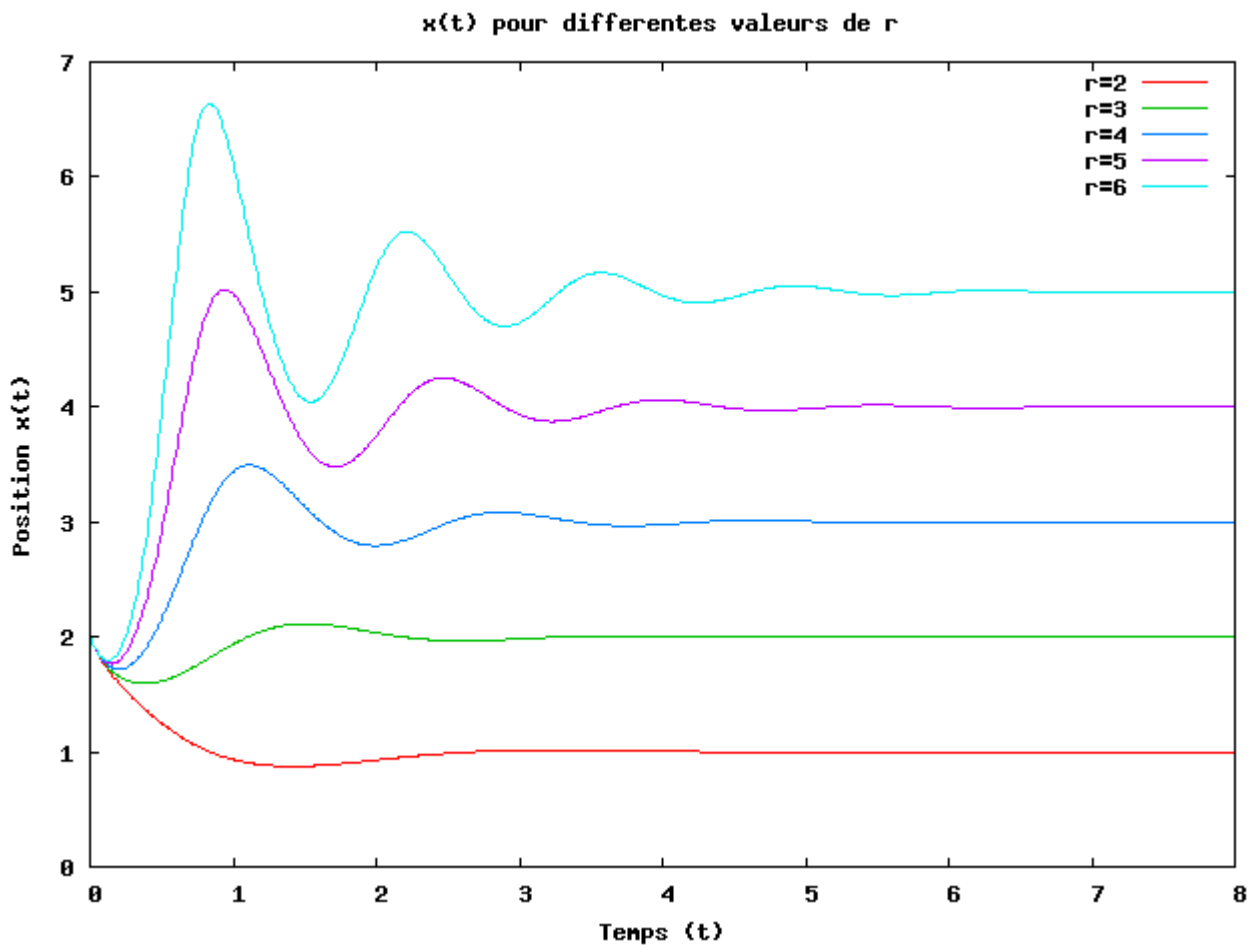
noeud stable



$a < 0$, foyer stable

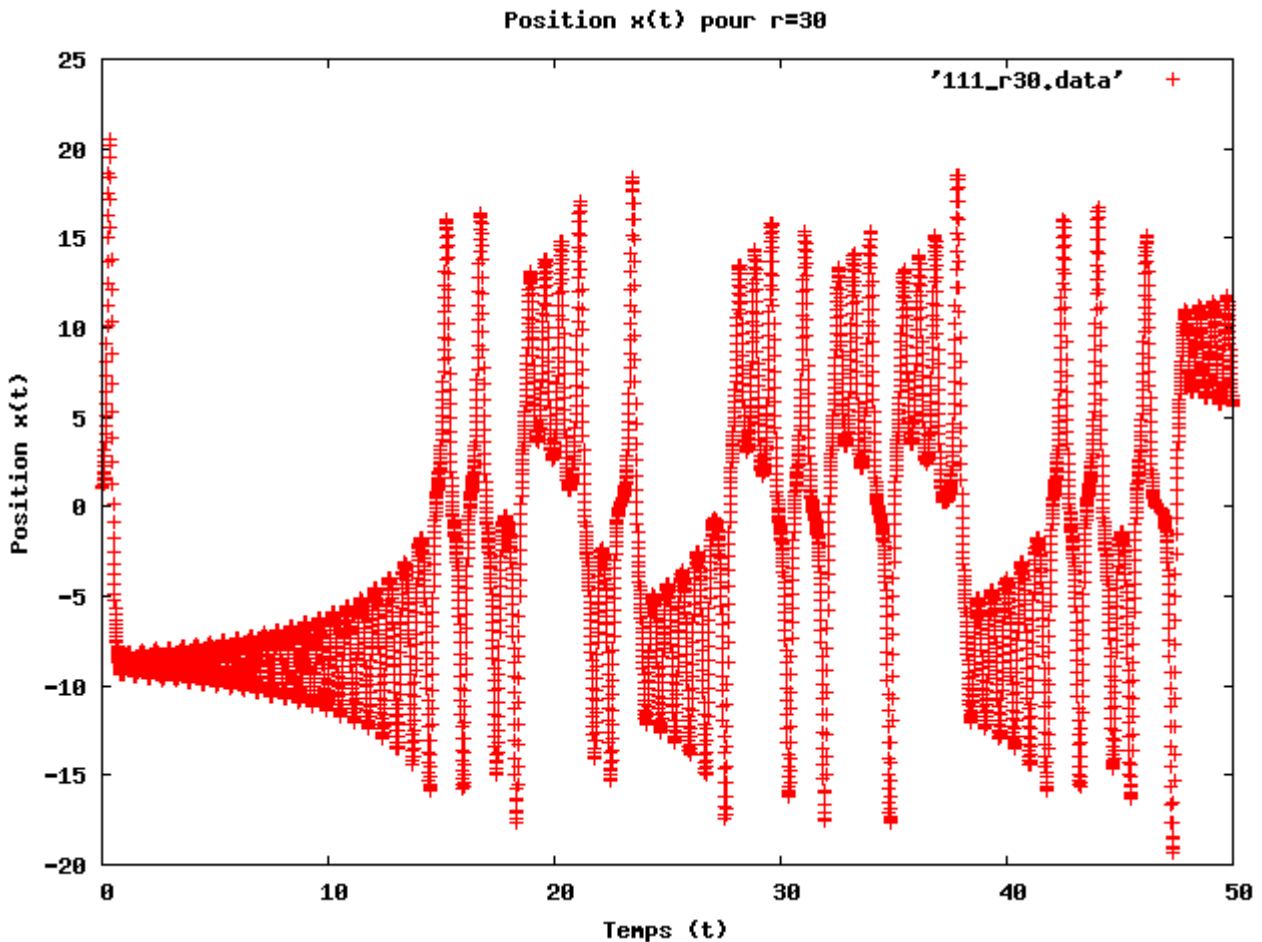
Nous prenons, pour les deux graphes de la page suivante, les mêmes conditions initiales $(1,2,2)$ et nous faisons varier r .

On voit très vite, que les **noeuds stables** deviennent des **foyers stables** (dès $r=2$) :



- Question 3

Dans cette question on se place à $r > 25$. Pour la condition initiale (1,1,1) :



Les points fixes P1 et P2 sont devenus des **foyers instables**. La trajectoire « saute » de l'orbite du point P1 à celle du point P2 aléatoirement. La sensibilité est telle qu'une variation infime de la trajectoire ferait « sauter » celle-ci sur l'autre point fixe alors que, si elle n'était pas modifiée elle continuerait à effectuer quelques orbites autour du même point fixe. Il n'est donc plus du tout possible de prévoir la trajectoire physiquement (dans la réalité), car comme dans le cas $1 < r < 24$ la trajectoire est très sensible aux conditions initiales.

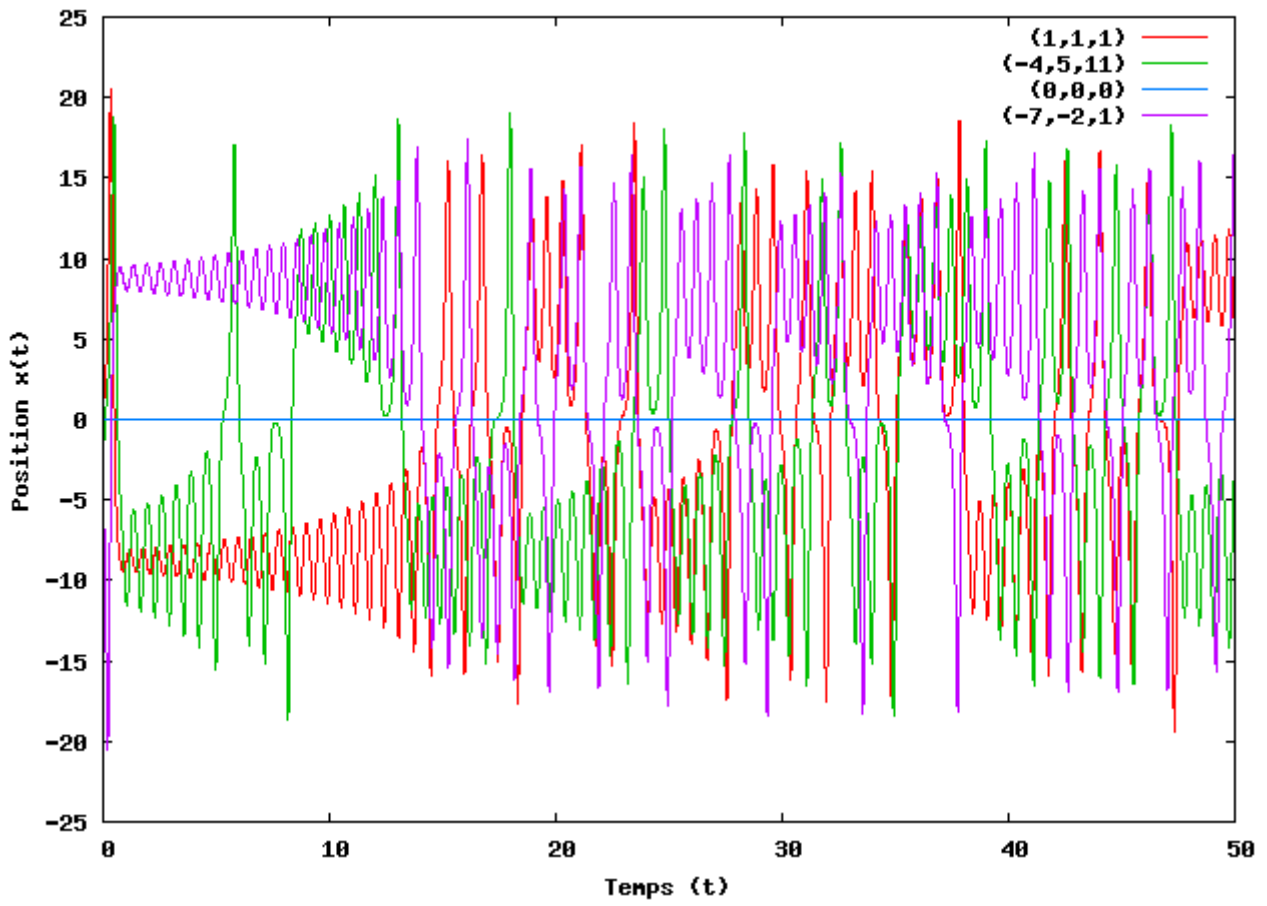
Dans le cas $1 < r < 24$ où nous ne pouvons pas prédire physiquement sur quel point fixe un point (dont nous connaissons les conditions initiales) allait converger. Par contre, si la trajectoire commençait à orbiter autour d'un point fixe nous savions qu'elle allait converger dessus.

Ici ce n'est plus possible. Le système est complètement chaotique. Pour deux positions très proches $x(0) - \tilde{x}(0) \ll 1$ on aura $x(t) - \tilde{x}(t) \propto e^{\lambda t}$ où λ est l'exposant de Lyapunov.

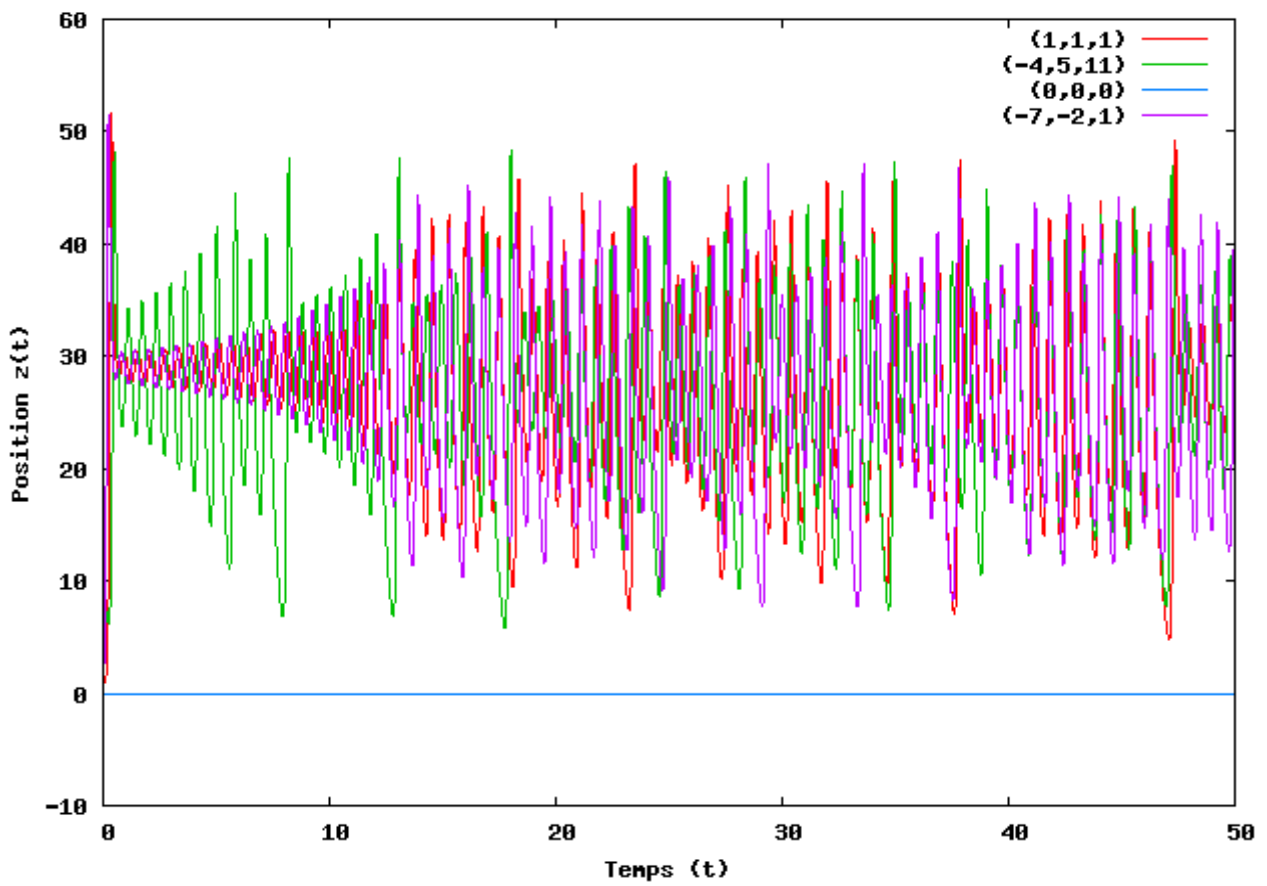
Dans la partie analytique nous allons voir qu'il y a une bifurcation de Hopf à $r_c = 24,74$.

Les graphes des pages suivantes montrent les positions $x(t)$ et $z(t)$ pour plusieurs conditions initiales, puis une représentation en trois dimensions de différentes trajectoires et enfin une projection d'une trajectoire sur le plan (x,z) où nous voyons très bien le célèbre papillon de l'attracteur étrange de Lorenz.

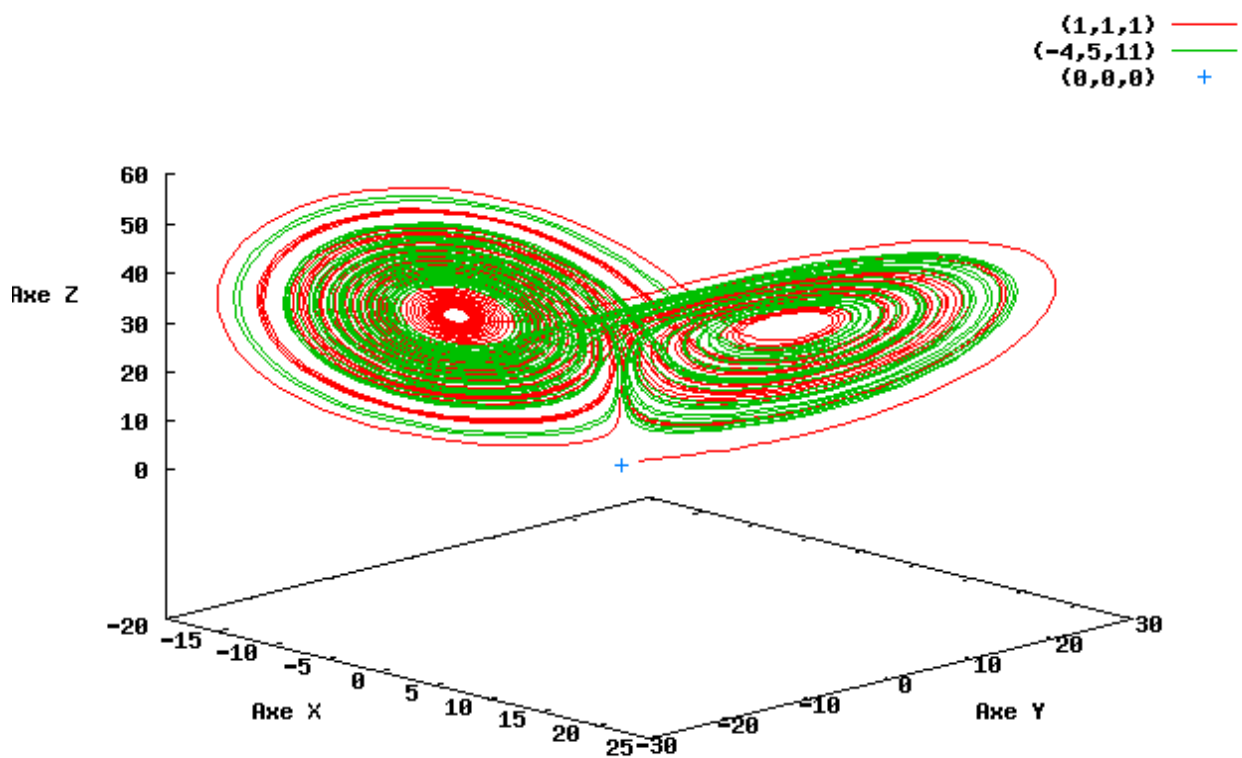
Position $x(t)$ pour $r=30$



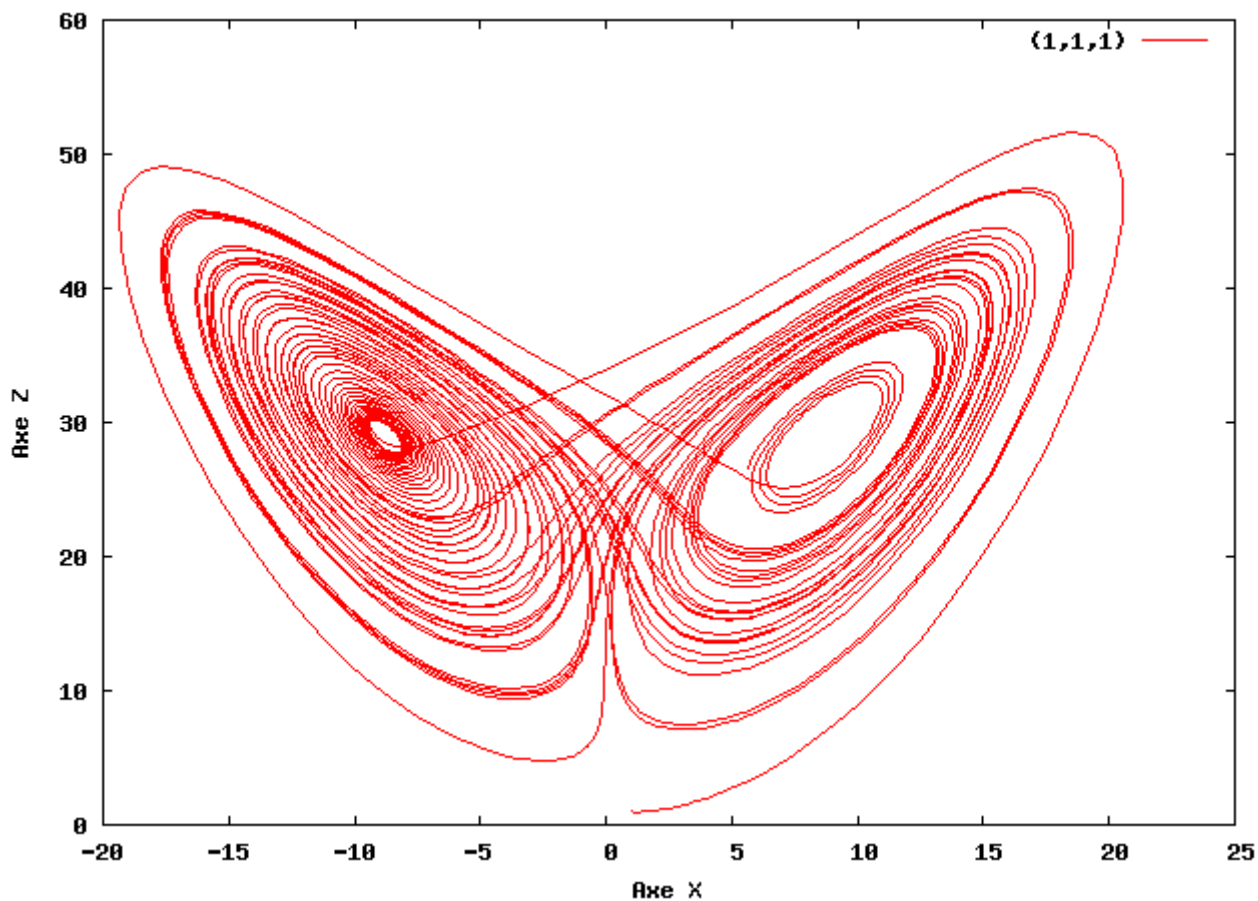
Position $z(t)$ pour $r=30$



Trajectories pour $r=30$



Projection sur (x, z) avec $r=30$



III. Complément (analyse théorique)

- Question 1

$$\begin{cases} \dot{x} = P_r(-x+y) \\ \dot{y} = -xz+rx-y \\ \dot{z} = xy-bz \end{cases}$$

Un premier point fixe trivial est $P_0 : \begin{pmatrix} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{pmatrix} \quad \forall r \geq 0$.

$$\begin{cases} 0 = P_r(-x+y) \Leftrightarrow x = y & (1) \\ 0 = -xz+rx-y & (2) \\ 0 = xy-bz \Leftrightarrow z = \frac{b}{xy} & (3) \end{cases}$$

(1) dans (3) donne $x^2 = bz \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{bz}$

(1) dans (2) donne $-xz+rx-z = 0 \Leftrightarrow z = r-1$

Les points fixes P_1 et P_2 sont donc $P_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{b(r-1)} \\ \sqrt{b(r-1)} \\ r-1 \end{pmatrix} \quad P_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{b(r-1)} \\ -\sqrt{b(r-1)} \\ r-1 \end{pmatrix}$ avec $r \geq 1$

Pour $r=1$, $P_0=P_1=P_2$ donc pour $r \in [0;1]$, il n'y a qu'un seul point fixe P_0 et pour $r > 1$, il y a 3 points fixes P_0 , P_1 et P_2 .

- Question 2

Nous allons maintenant étudier la stabilité linéaire des points fixes pour le cas $|r-1| \ll 1$, c'est à dire lorsque $r \rightarrow 1+\epsilon$ et $r \rightarrow r-\epsilon$ avec $\epsilon > 0$, $\epsilon \ll 1$

La matrice jacobienne $DF \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ s'écrit :
$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_x}{\partial x} & \frac{\partial F_x}{\partial y} & \frac{\partial F_x}{\partial z} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} & \frac{\partial F_y}{\partial y} & \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_z}{\partial x} & \frac{\partial F_z}{\partial y} & \frac{\partial F_z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -P_r & P_r & 0 \\ r-z & -1 & -x \\ y & x & -b \end{pmatrix}$$

◦ Pour P_0 :

$DF \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -P_r & P_r & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}$ et comme $\det(DF - \lambda I) = 0$, nous avons l'équation suivante :

$$\begin{aligned}
& -(P_r + \lambda)(-1 - \lambda)(-b - \lambda) - rP_r(-b - \lambda) = 0 \\
\Leftrightarrow & -(P_r + \lambda)(\lambda^2 + \lambda b + \lambda + b) + rP_r b + \lambda r P_r = 0 \\
\Leftrightarrow & -\lambda^3 - \lambda^2 b - \lambda^2 - \lambda b - P_r \lambda^2 - P_r \lambda b - P_r \lambda - P_r b + rP_r b + \lambda r P_r = 0 \\
\Leftrightarrow & \lambda(-\lambda^2 - \lambda(b + 1 + P_r) - (b + bP_r + P_r - rP_r)) + rP_r b - P_r b = 0 \\
\Leftrightarrow & \lambda(-\lambda^2 - \lambda(b + 1 + P_r) - (b + bP_r + P_r(1 - r))) + P_r b(r - 1) = 0 \quad (4)
\end{aligned}$$

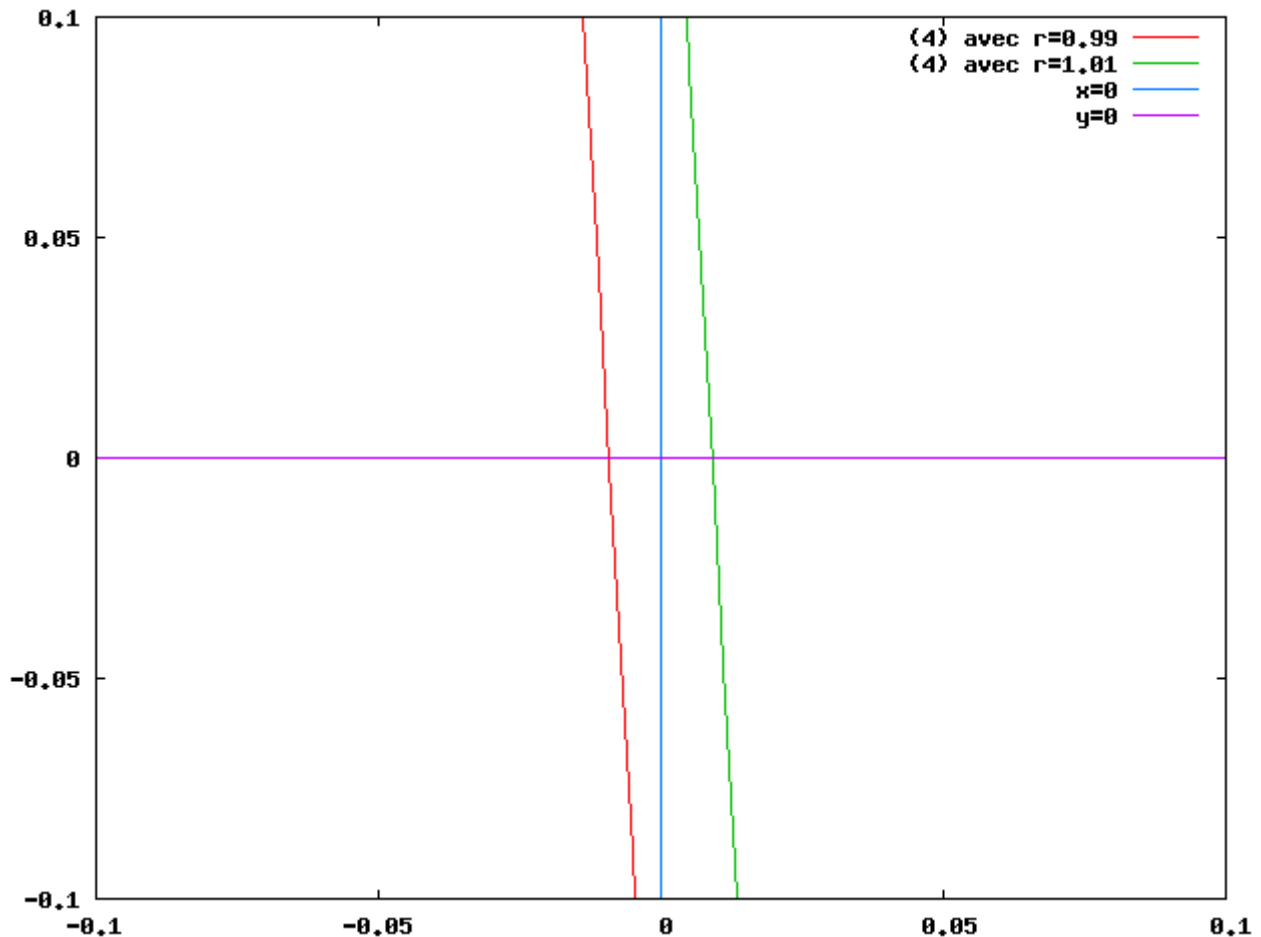
Lorsque $|r - 1| \ll 1$: $P_r(1 - r) \ll b + bP_r$ et le terme $P_r b(r - 1)$ tend vers $0+$ si r tend vers 1 par valeurs positives, et il tend vers $0-$ si r tend vers 1 par valeurs négatives i.e $P_r b(r - 1) \rightarrow \epsilon P_r b$ et $P_r b(r - 1) \rightarrow -\epsilon P_r b$

$\lambda_1 = 0$ étant solution de (4) lorsque ce terme $P_r b(r - 1)$ s'annule (pour $r = 1$) la solution λ_1 sera donc :

- $\lambda_1 = \epsilon' > 0$ pour $r = 1 + \epsilon$
- $\lambda_1 = -\epsilon'' < 0$ pour $r = 1 - \epsilon$

avec $\epsilon' > 0, \epsilon'' > 0$ et $\epsilon' \ll 1, \epsilon'' \ll 1$

Pour s'en convaincre nous pouvons afficher la courbe de l'équation (4) au voisinage de 0 pour pour $r = 1 \pm \epsilon$:



Les deux autres racines sont donc très proches des racines du polynôme de degré 2 :

$$-\lambda^2 - \lambda(b+1+P_r) - (b(P_r+1)) = 0$$

$$\Delta = (b+1+P_r)^2 - 4(b(P_r+1))$$

$$\lambda_2 \simeq \frac{-(b+1+P_r) + \sqrt{((b+1+P_r)^2 - 4b(P_r+1))}}{2}$$

$$\lambda_2 \simeq \frac{-(b+1+P_r) - \sqrt{((b+1+P_r)^2 - 4b(P_r+1))}}{2}$$

Application numérique : $\lambda_2 \simeq -11$, $\lambda_3 \simeq -\frac{8}{3} \simeq -2,67$

Il y a donc une première bifurcation pour le point fixe P_0 car : il pour $r < 1$ on a :

$$\lambda_3 < \lambda_2 < \lambda_1 < 0 \text{ pour } r < 1 \rightarrow \text{noeud stable}$$

$$\lambda_3 < \lambda_2 < 0 < \lambda_1 \text{ pour } r > 1 \rightarrow \text{col (instable)}$$

o Pour P_1 et P_2 :

$$DF \begin{pmatrix} \sqrt{b(r-1)} \\ \sqrt{b(r-1)} \\ r-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -P_r & P_r & 0 \\ 1 & -1 & -\sqrt{b(r-1)} \\ \sqrt{b(r-1)} & \sqrt{b(r-1)} & -b \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(DF - \lambda I) = 0 &\Leftrightarrow -(P_r + \lambda)((1 + \lambda)(b + \lambda) + b(r - 1)) - P_r((-b - \lambda) + b(r - 1)) = 0 \\ &\Leftrightarrow -(P_r + \lambda)(br + \lambda + \lambda b + \lambda^2) - P_r(br - 2b - \lambda) = 0 \\ &\Leftrightarrow -P_r br - P_r \lambda - P_r \lambda b - P_r \lambda^2 - \lambda br - \lambda^2 b - \lambda^3 - P_r b r + 2P_r b + P_r \lambda = 0 \\ &\Leftrightarrow -\lambda^3 - \lambda^2(P_r + 1 + b) - \lambda(P_r b + b r) + 2P_r b(1 - r) = 0 \end{aligned}$$

On peut simplifier ce calcul en utilisant le fait qu'il existe une valeur propre $\lambda_1 = 0$ si $r = 1$ donc on peut supposer que $|\lambda_1| \ll 1$ si $|r - 1| \ll 1$ on peut donc négliger λ_1^2 et λ_1^3 de l'équation :

$$\lambda_1 \simeq -\frac{2P_r b(r-1)}{P_r b + b r} < 0 \text{ pour } r > 1$$

Les autres valeurs propres λ_2, λ_3 ne dépendent pas fortement de r , i.e : $\lambda_{2,3}(r) \approx \lambda_{2,3}(1) + O(r-1)$, il suffit de déterminer leur valeur à $r = 1$. En fait ce raisonnement est analogue à celui que l'on a fait pour P_0 .

$$-\lambda^2 - \lambda(P_r + 1 + b) - (P_r b + b) = 0$$

On résout donc :

$$\Delta = (P_r + 1 + b)^2 - 4b(P_r + 1)$$

Les valeurs propres sont donc :

$$\lambda_2 \simeq -\frac{(P_r+1+b)-\sqrt{(P_r+1+b)^2-4b(P_r+1)}}{2} < 0$$

$$\lambda_3 \simeq -\frac{(P_r+1+b)+\sqrt{(P_r+1+b)^2-4b(P_r+1)}}{2} < 0$$

On fait de même pour P_2 et on trouve le même résultat $\lambda_3 < \lambda_2 < \lambda_1 < 0$ (**noeud stable**)
 Donc pour les points fixes P_1, P_2 sont stables pour $|r-1| \ll 1$

A $r=1$, on a donc une **bifurcation fourche supercritique**. Le digramme de bifurcation se trouve après la question 3.

• **Question 3**

On va maintenant montrer que les points fixes issus de la première bifurcation se déstabilisent à leur tour pour une valeur r_c par une bifurcation de Hopf (on admettra que la condition de transversalité est bien remplie).

Cette deuxième bifurcation est caractérisée par une paire de valeurs propres complexes conjuguées pour lesquelles la partie réelle change de signe à la bifurcation. On sait donc qu'il existe des solutions purement imaginaires $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$ quand r assume sa valeur critique r_c .

En prenant les parties réelles et imaginaires de l'équation caractéristique (avec $\lambda \equiv i\omega$ et $\omega \in \mathbb{R}$) on trouvera deux équations indépendantes permettant de déterminer ω et la valeur de r_c .

Reprenons l'équation caractéristique trouvée dans la question 2 :

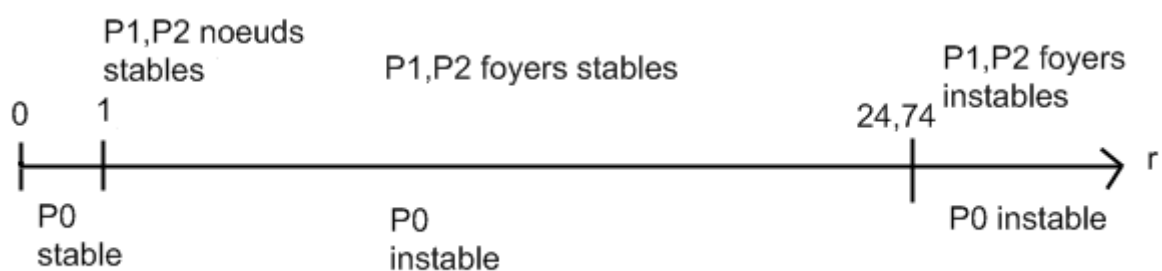
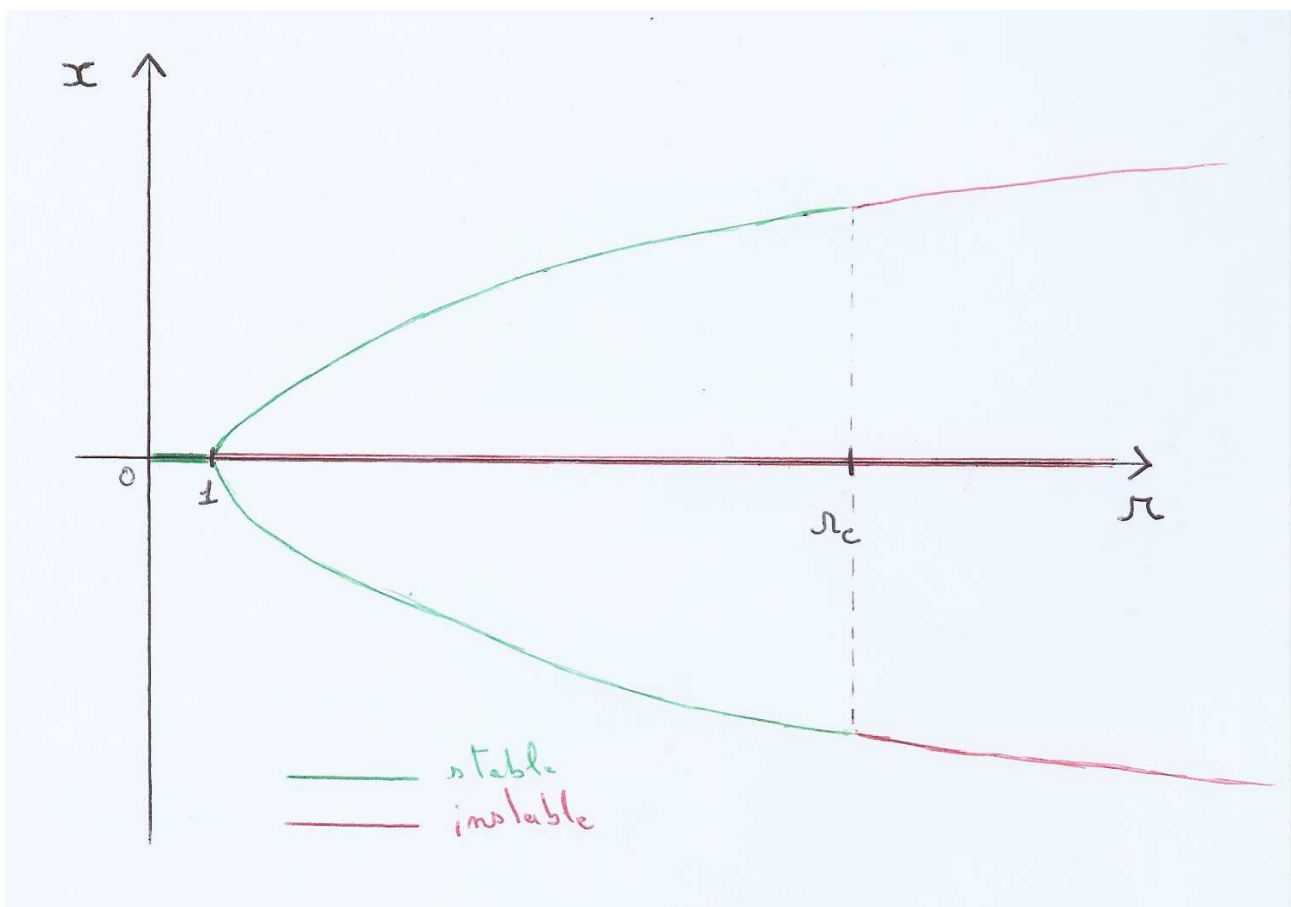
$$\begin{aligned} \det(DF - \lambda I) = 0 &\Leftrightarrow -(P_r + \lambda)((1 + \lambda)(b + \lambda) + b(r - 1)) - P_r((-b - \lambda) + b(r - 1)) = 0 \\ &\Leftrightarrow -(P_r + \lambda)(br + \lambda + \lambda b + \lambda^2) - P_r(br - 2b - \lambda) = 0 \\ &\Leftrightarrow -P_r br - P_r \lambda - P_r \lambda b - P_r \lambda^2 - \lambda br - \lambda^2 b - \lambda^3 - P_r b r + 2P_r b + P_r \lambda = 0 \\ &\Leftrightarrow -\lambda^3 - \lambda^2(P_r + 1 + b) - \lambda(P_r b + b r_c) + 2P_r b(1 - r_c) = 0 \\ &\Leftrightarrow -(i\omega)^3 - (i\omega)^2(P_r + 1 + b) - i\omega(P_r b + b r_c) + 2P_r b(1 - r_c) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \omega^2(P_r + 1 + b) + 2P_r b(1 - r_c) = 0 & (\Re) \\ \omega^3 - \omega(P_r b + b r_c) = 0 & (\Im) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \omega^2 = \frac{2P_r b(r_c - 1)}{P_r + 1 + b} \\ \omega^2 = P_r b + b r_c \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} r_c = \frac{P_r b + \frac{2P_r b}{P_r + 1 + b}}{\frac{2P_r b}{P_r + 1 + b} - b} \\ \omega = \pm \left(P_r b + b \frac{P_r b + \frac{2P_r b}{P_r + 1 + b}}{\frac{2P_r b}{P_r + 1 + b} - b} \right) \end{cases} \end{aligned}$$

Application numérique : $r_c = 24,74$ et $\omega = \pm 92,64$

Il y a une bifurcation de Hopf à $r_c = 24,74$, où les points fixes P_1 et P_2 qui étaient des foyers stables pour $r < r_c$ deviennent des foyers instables pour $r > r_c$ (et ils sont des centres pour $r = r_c$).

On remarque aussi que, comme on l'a vu avec la simulation, il y a une valeur de r pour laquelle ces points fixes passent de noeuds stables à foyers stables puisque pour $|r-1| \ll 1$ on avait trouvé des noeuds stables.

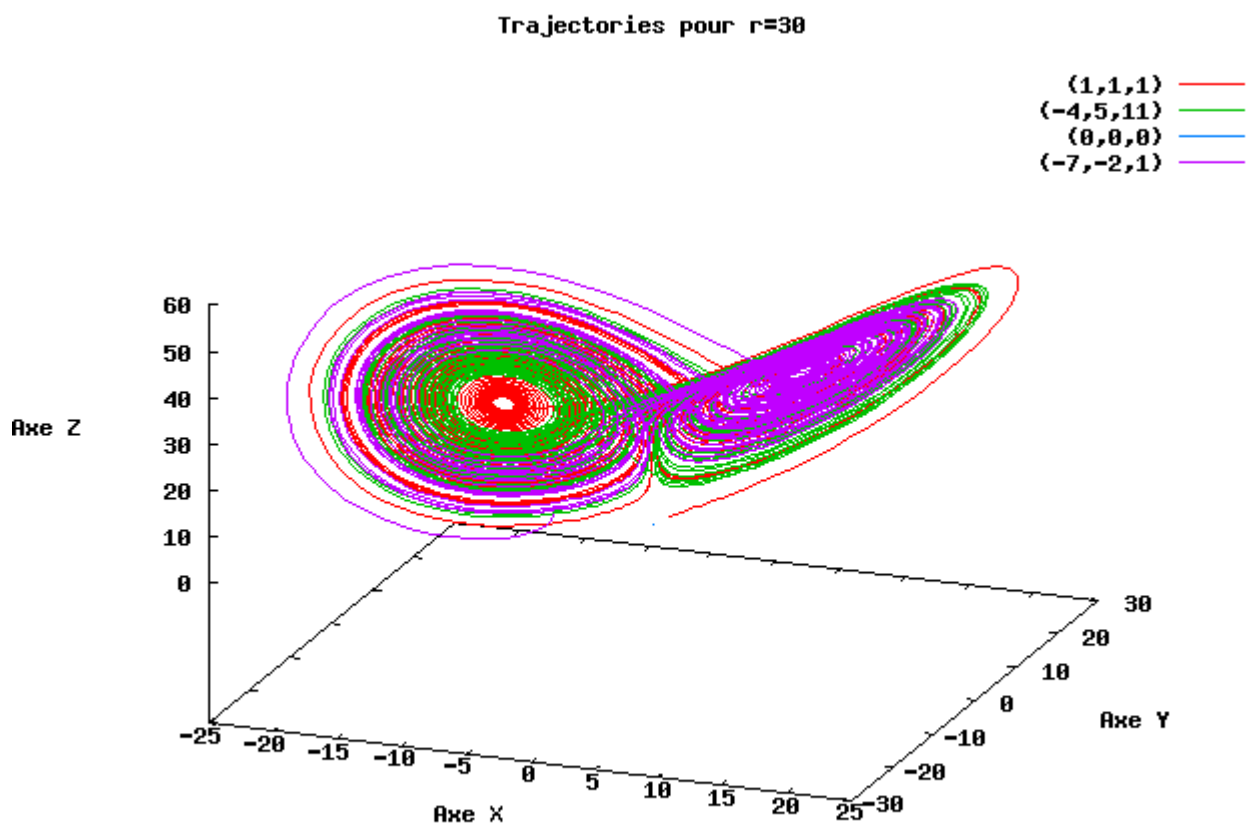
Voici le diagramme de bifurcation pour x :



IV. Conclusion

L'étude du modèle de Lorenz, nous a permis de montrer qu'un système d'équations apparemment simple peut en fait être complexe et dans certains cas chaotique. Ce comportement chaotique apparaît alors que l'on est dans un modèle déjà très simplifié d'étude des phénomènes météorologiques, et il remet en cause notre capacité à prédire ces phénomènes physiques, étant donné qu'en pratique on est toujours limité par la précision de nos mesures.

Grâce à la simulation informatique nous avons mis en évidence ce comportement chaotique en particulier en traçant le célèbre attracteur étrange de Lorenz.



- **Bibliographie :**
 - Cours Phénomènes non-linéaires
 - TD Phénomènes non-linéaires (exercice 9.5)
- **Logiciels utilisés**
 - Dev C++ for Windows v4.9.9.2
 - GNUplot win32 v4.2
 - OpenOffice (Math & Writer) v3.0.0